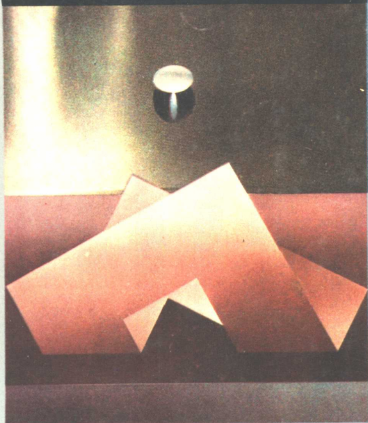
江苏教育出版社



SHUXUEZHEXUE
XINLUN
JIANGSU JIAOYU CHUBANSHE

数学哲学新论

郑毓信 著





数学哲学新论

郑毓信 著

江苏教育出版社



ISBN 7-5343-1161-6

数学哲学新论
郑毓信 著
责任编辑 王建军

出版发行：江苏教育出版社
（南京中央路165号，邮政编码：210009）
经 销：江苏省新华书店
印 刷：江苏新华印刷厂
（南京中央路145号，邮政编码：210009）

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 8.25 插页 2 字数 201,500
1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷
印数 1—1,000 册

ISBN 7—5343—1161—6

G·1021 定价：3.20 元

谨以本书献给伊姆雷·拉卡托斯(I. Lakatos),并向约翰·沃特金斯教授(J.Watkins)、吉琳·佩奇女士(G.Page)、琳达·张女士(L.Cheung)及其他朋友表示诚挚的谢意，正是由于他们的大力帮助,使我在伦敦经济政治学院度过了愉快的一年。

This book is dedicated to Imre Lakatos. I would also like to express my thanks to Professor John Watkins, Gillian Page, Linda Cheung and others for their kind help which made my life in London during 1987 ～ 1988 more beneficial and happier.

目 录

引言　数学哲学的历史发展

什么是数学哲学？通常的回答是：这是对数学的哲学分析。这一回答并没有什么错误。但是，只须稍作推敲，就可发现这又是一种近似于"同义反覆"的回答，即并没有为人们提供多少有用的信息。例如，按照同样的方式，我们也可以说，科学哲学是对科学的哲学分析，物理哲学是对物理学的哲学分析，逻辑哲学是对逻辑学的哲学分析……但是，除去分析对象的不同以外(这是不言自明的)，这些解答又能说明什么问题呢！在大多数的情况下，这种机械的、千篇一律的回答事实上只能引起误解及错误的认识。

当然，要想用简单的一句话对一门学科进行概括是十分困难的。事实上，这里所涉及的是这样一个问题：怎样才能较好地刻画出一门学科的基本面貌？不知道是谁最先提出了应当从问题(及问题境况)着手来理解科学理论的思想，但波普尔(K.Popper)在这一问题上的精辟论述确实给我留下了深刻印象：每门学科都有自己的特殊问题，而又正是通过问题的解决或转换，这一学科才获得了自己的历史发展。下面就按照这样的思路来对什么是数学哲学的

问题作出进一步的分析。

一、自古希腊时代至19世纪初，数学哲学主要作为一般哲学的一个组成部分得到了自己的早期发展。具体地说，由于数学的特殊性(数学对象，如1、2、3等，都是所谓的“共相”)，数学对象的实在性问题早在古希腊时代就已引起了哲学家们的关注。对于这一问题的分析，事实上构成了有关哲学思想的重要组成部分。例如，一些学者指出，柏拉图就是通过几何对象(例如，圆)的分析引出了理念论的思想；而这一理论反过来又为数学对象的本体论问题提供了具体的解答：数学对象是所谓的“理念世界”中的存在，也即是一种不依赖于人类思维的独立存在。另外，在亚里士多德那里，数学对象的实在性问题则构成了所谓的“分离问题”的一个部分，亚里士多德并明确提出了这样的思想：数学对象只是一种抽象的可能性，即只是由于数学家的抽象思维才实现了由“潜在”向“实在”的转化。

中世纪以后，随着宗教神学与经院哲学的崩溃，人们对先前遗留下来的一切文化和思想采取了普遍怀疑的态度。然而，数学的真理性却似乎是唯一的例外，以致数学就被认为是“沼泽地里的一块稳妥的立足点”。但是，数学为什么可能具有这种无可怀疑的真理性呢？从而，数学的真理性问题也就自然成了近代哲学研究的一个重要课题。例如，休谟为此提出了两类知识的区分；康德则认为数学命题是所谓的“先天综合判断”。

综上可见，早期的数学哲学研究就是围绕数学对象的实在性及数学的真理性这样两个问题展开的。

二、从19世纪中期开始，数学哲学逐渐进入了一个以数学基础研究为中心的新的历史时期。数学基础研究是围绕这样一个问题展开的：如何为数学奠定一个可靠的基础，并借助可靠的方法去开展出全部(或大部分)数学，从而彻底解决数学的可靠性问题。数学基础研究的开展是有其历史必然性的。对此可以从正反两个

方面进行说明。首先，“理论的数量上的增长必然引起更好的论证理论，使理论系统化，批判地审查理论的基础等这样一些任务。”(A. Д. 亚历山大洛夫等：《数学——它的内容、方法和意义》，科学出版社，1984年，第51页。)具体地说，作为微积分理论深入发展的必然一步，19世纪的数学家们积极从事了为这一理论奠定严格逻辑基础的工作(这就是数学史上所谓的“批判运动”)。这一运动的直接结果是“分析的算术化”，即建立了严格的实数理论和极限理论，而后者则又为进一步的研究提供了直接的动力。例如，作为已有工作的评价，人们自然会想到这样的问题：分析是否真正算术化了(即其中是否还用到了其它的概念和方法)？我们又应当怎样来看待这种工作的意义？特别是，算术理论(更准确地说，是自然数理论)能否看成是微积分理论乃至整个数学的可靠基础？这样，一般意义上的数学基础研究就作为理论增长的一个必然结果得到了发展。其次，从历史的角度看，数学基础研究又是与所谓的数学基础危机直接相联系的。这里所说的数学基础危机首先是指关于无穷小量的悖论在数学家中引起的困惑和不安；其后，集合论悖论(特别是著名的罗素悖论)的发现则又造成了更大的混乱：由于数学的现代研究已经清楚地表明了集合的概念和方法在数学中所占据的重要地位——集合的概念和方法不仅渗透于几乎所有的数学分支之中，而且，在由自然数理论出发去开展其它数学理论时，我们事实上也用到了集合的概念和方法——因此，集合论悖论的发现就对整个数学的可靠性构成了极大的威胁。显然，这也就从反面更为清楚地表明了深入开展基础研究的必要性和紧迫性。

由于哲学观点的分歧，数学家们在基础研究中采取了不同的基本立场，其中主要有以弗雷格(G.Frege)、罗素(B.Russell)为代表的逻辑主义，以布劳维尔(L.E.J.Brouwer)为代表的直觉主义以及以希尔伯特(D.Hilbert)为代表的形式主义。由于这些学派对数学基础乃至一般的数学哲学问题都持有不同的观点，并在相

互之间进行了激烈的批评和争论，从而，随着基础研究的深入，数学哲学的研究在本世纪交替之际及以后的一段时期内，就出现了一个“百花齐放、百家争鸣”的欣欣向荣的局面。这就如同鲁滨逊(A.Robinson)所说：“就数学哲学的研究而言，1890到1940年之间的这50年是一个黄金时代。”(«Formalism 64», 载 «Logic, Methodology and Philosophy of Science», ed. by Bar-Hillel, North-Holland Pub. Co., 1964年，第228页.)这一黄金时代也就是数学哲学以基础研究为中心的历史时期。

三、作为其数学哲学思想的具体体现，逻辑主义等学派提出了各自的基础研究规划，并为具体地实现这些规划进行了深入的研究。但是，尽管他们都作出了巨大的努力，所有这些学派的研究规划都没有能够得到实现。这样，在经历了上述的黄金时代以后，数学哲学的研究就出现了一个停滞的阶段。例如，卡尔马(L.Kalmar)就曾这样写道：“在经历了本世纪上半叶的繁荣以后……数学基础现在看来进入了一个悲观的、停滞的阶段。”(«Foundations of Mathematics—Whither now?», 载 «Problems in the Philosophy of Mathematics», ed. by Imre Lakatos, Horth-Holland Pub. Co., 1967年，第192页.)

然而，只要数学本身仍然处于茁壮的发展之中，关于数学的哲学分析就不可能完全停顿下来；另外，某个研究方向上的连续失败则又必然会引起新的思考，从而也就包含了导致新的重要发展的巨大可能性。笔者认为，数学哲学现在正经历着由数学基础为中心的时期向新的时期的重要转变。

尽管尚未见到太阳，但曙光已经预告了它的到来；尽管由孩提到成年还会有一些重要的变化，但新的发展毕竟又是以其雏型为现实基础的。通过对这一领域内的有关发展作综合的分析以使读者对数学哲学的现代演变在整体上有一个清楚的认识，这就是本书的主要目的。

笔者在先前曾与夏基松教授与林曾同志合作先后完成了《西方数学哲学》(人民出版社，1986年)与《数学、逻辑与哲学》(湖北人民出版社，1987年)等两部著作，其中主要对数学基础研究进行了介绍和分析。自1987年8月至1988年8月，笔者对英国进行了为期一年的学术访问，拉卡托斯(Imre Lakatos)生前工作过的伦敦经济政治学院哲学、逻辑和科学方法系为我提供了良好的工作环境，广泛的学术交流则更使我获得了新的学习机会，一些多年来一直缠绕心间的基本问题似乎终于获得了较为满意的解答。十分幸运的是，在建立一种新的数学哲学理论方面，我一直得到了我的导师徐利治教授的直接指导和帮助。事实上，其中的一些基本思想就是属于徐利治教授的。我们认为，在数学哲学的现代发展中，中国学者是应当作出自己的贡献的。本书中所提出的模式观的数学哲学理论(第4章——这是由徐利治教授与笔者合作完成的)即是这一方向上的一个努力。

最后，笔者愿意再次引用波普尔的又一重要思想来结束引言部分的论述。波普尔向年青的科学工作者提出了如下的建议：应当了解现时的问题境况。这也就是说，应当"设法去了解人们现在在科学上讨论些什么。找出困难所在，把兴趣放在不一致的地方。"(《猜想与反驳》，上海译文出版社，1986年，第182页。)笔者诚挚地希望读者也能通过阅读本书了解到在数学哲学领域中人们现在在讨论哪些问题，出现了什么样的新思想，又存在着怎样的困难……如果年青的朋友们能因此而引起兴趣并获得一定的启示，笔者更将感到极大的欣慰，因为，数学哲学的发展是需要更多的年青力量的。

郑毓信

1989年7月于南京大学

第 1 章　一个时代的终结

1.1　数学需要基础吗？

数学哲学的现代发展是相对于以数学基础研究为中心的时代而言的。自 1890 年到 1940 年的这50年的确可以说是数学哲学研究的一个黄金时代。弗雷格、罗素、布劳维尔及希尔伯特等人围绕数学基础问题进行了系统和深入的研究，并发展起了逻辑主义、直觉主义和形式主义等具有广泛和深远影响的数学哲学观，从而为数学哲学的研究开辟了一个崭新的时代。正因为这是一个以基础研究为中心的时代，在数学哲学领域中就曾出现过以下的特殊现象（相对于其它的哲学研究而言）：有不少数学哲学的著作即是以数学基础为名的。如弗雷格的《算术基础》，维特根斯坦(L.Wittgenstein)的《关于数学基础的评论》，怀尔德(R.Wilder)的《数学基础导论》，尼本(G.Kneebone)的《数理逻辑与数学基础》等。另外，如果随意地打开一本数学哲学的著作，只要它是在这一时代或是在稍后的年代中完成的，我们也一定可以发现基

础问题或关于逻辑主义等学派的讨论在该书中占有主要的地位。然而，“这一黄金时代现在已经过去了”。而作为这一时代已经终结的首要标志就是关于基础研究在总体上的反思。例如，这种反思即是以下的一系列论文的主要论题：拉卡托斯的《无穷回归与数学基础》，卡尔马的《数学的基础——今在何方？》，普特南（H.Putnam）的《没有基础的数学》，斯莱尼斯（E·Sleinis）的《数学需要基础吗？》，沙克尔（S·Shanker）的《数学基础的基础》等。

对于数学基础研究的反思首先是对于“基础研究”这一基本概念的澄清。在此人们普遍表达了这样的思想，即认为应当注意区分有关的技术性研究和哲学性分析。例如，斯莱尼斯在论文《数学需要基础吗？》中就曾明确指出：“我极力主张有必要区分数学基础的两种不同含义：（1）数学的内在基础，（2）数学的认识论基础。”具体地说，“一方面，存在着可以称为数学的内在基础的东西。它们是由数学上无可怀疑的较小的初始命题集合所组成的，可以认为至少数学的主要和核心部分是建立在这些无可怀疑的命题之上的；另一方面，似乎存在这样的问题，即什么东西保证数学上无可怀疑的初始命题集的可接受性，或者什么是接受这种原始集的理性基础，这个问题我们可以叫做数学的认识论基础的问题。”（《自然科学哲学问题丛刊》，1984年，第一期，第16、14页）另外，维特根斯坦也曾对“数学基础”的两种不同意义作过如下的说明：“当一个人在谈及数学基础时，他可能是指两件不同的事情。他所指的可能即是像说代数是微积分的基础那样的意义，为了学习微积分我们应当首先学习代数。在这样的意义上，数学就像是一幢建筑物，而所说意义上的微积分……则是它的一部分，它的最底层就是我们所藉以开始的地方。借助于基础人们也可以指那种对某些成问题的东西加以支撑的方法。如果通常的数学有问题的话，它的基础就应是没有问题的……”（Wittgenstein, L:«Wittgenstein's Lectures; Cambridge 1932-1935», ed. by A. Ambrose, Oxford, Ba-

sil Blackwell, 1979年，第 121-222页.） 显然，基于目标的不同，我们在此也可谈及两种不同性质的基础研究：一种是纯数学性的研究，即如何以一种数学理论为基础去开展出另一种理论；另一则是哲学性的思考、即是希望能对数学的认识论基础问题作出明确的解答。

这是一个历史的事实：在以往的数学基础研究中，数学性的研究与哲学性的分析往往是互相依赖、密切相关的。例如，沙克尔在《数学基础的基础》一文中就曾对那种认为可以把"分析的严格化"说成纯数学研究的观点进行了批评。另外，就基础研究的时代而言，关于数学基础的数学性研究与哲学性分析的紧密结合则更是这一时代的最主要特点之一。这也就如同作者在《西方数学哲学》一书中所指出的："关于数学基础的数学性研究和哲学性分析是互相依赖、互相渗透的。例如，主要就是由于数学性的基础研究工作的深入，特别是19世纪的'分析严格化'运动，才促进了现代关于数学基础的哲学性分析，以致形成了逻辑主义、直觉主义和希尔伯特的形式主义等学派；反之，这些学派在基础问题上的具体研究规划则是他们在基础问题上的哲学思想的具体表现。"（第39页）具体地说，由于认为数学实质上只是逻辑的一个部分，因此，在逻辑主义看来，我们就可以逻辑为基础去开展出全部数学，从而也就有如下的具体研究规划：第一，由逻辑概念出发，通过明确的定义去引出全部（或大部分）数学概念；第二，由逻辑的法则（及有关的定义）出发，经由纯粹的逻辑演绎去推出全部（或主要的）数学命题。另外，直觉主义者通过"可信性"问题的思考提出了数学的"构造性"观点，即认为只有直觉上可构造的数学命题才是可靠的。直觉主义者并以此为准则积极从事了发展新的可靠的数学（即所谓的直觉主义数学）以取代已有的、不那么可靠的数学（即古典数学）的工作。这就是直觉主义的基础研究规划。最后，由于认为真正的可靠性只限于有限的范围，而无限则只具有方法论的

意义，因此，希尔伯特在数学基础研究中就采取了"方法论的实无限论者"的立场。希尔伯特并因此而提出了著名的希尔伯特规划，即认为应当把包含有非有限成分的数学理论组织成形式系统，并用有限的方法证明这种系统的相容性。显然，这一规划也就是其哲学思想的具体体现。

尽管就已有的工作而言，关于数学基础的数学性研究与哲学性分析是密切相联系的，但是，在这两者之间毕竟又存在着重要的区别。也正因为此，一些学者明确提出了数学不需要认识论基础的观点（与此相反，他们对关于数学基础的数学性研究则往往采取肯定的态度）。例如，斯莱尼斯就曾强调指出："我所要提倡的主要论点是：对数学的认识论基础的关注是完全没有根据的。是什么东西保证数学作为一个整体的可接受性，或者数学作为一个整体，其合理基础是什么，这些问题都建立在误解之上。换句话说，我认为数学不需要认识论基础。"（同上，第16页。）另外，普特南在《没有基础的数学》中也曾明确提出："我并不认为数学是含糊不清的；我也不认为数学在其基础中有任何危机；事实上，我根本不相信数学具有或需要什么'基础'。"又"我认为哲学在古典数学中发现的困难并不是真正的困难，我并认为：所已提出的关于数学的哲学解释都是错误的。这种哲学解释正是数学所不需要的东西。"（«Mathematics without Foundations»，载«Mathematics, Matter and Method», Cambridge Univer. Press, 1979年，第43-45页。）

一般地说，关于数学不需要认识论基础的论题主要建立在以下的论据之上：数学中并不存在所谓的基础危机，又由于基础研究常常被认为就是为了解决所说的基础危机，因此，在持有上述观点的人看来，我们就根本不需要所说意义上的数学基础研究，也即根本不需要数学的认识论基础。

从历史上看，导致"数学基础危机"这一说法的原因是多方面的。普特南等人对此分别进行了分析。

第一，非欧几何的建立是否意味着“数学真理性的丧失”?例如，克莱因(M.Kline)就曾写道:“这样多的至少是部分地互相矛盾的几何学居然都能用来描述物理空间，我们真不知道，对于物理空间来说，究竟哪一种是真实的了。”“数学自命为真理的态度已经是必须抛弃的了。”(《数学的基础》，载《自然杂志》，1979年，第4、5期，第229、305页.)针对这种悲观主义的论调，普特南指出，非欧几何的建立事实上只是表明了“自明性”并不能被看成相应结论绝对真理性的保证。从而，我们所应抛弃的就只是关于数学具有绝对的先天真理性的观点，而不能因此而否定数学的真理性。

第二，集合论悖论的发现是否证明了已有数学理论的不可靠性?例如，希尔伯特就曾写道:“必须承认，在这些悖论面前，我们目前所处的情况是不能长期忍受下去的。人们试想:在数学这个号称可靠性和真理性的模范里，每一个人所学的、教的和应用的那些概念结构和推理方法竟会导致不合理的结果。如果甚至于数学思考也失灵的话，那么应该到哪里去寻找可靠性和真理性呢?”(«On the Infinite»，载《Philosophy of Mathematics, Selected Readings», ed. by P. Benacerraf and H. Putnam, Prentice- Hall, Inc., 1964年，第141页.)应当承认，集合论悖论的发现在最初一段时间的确使数学家们感到极大的震惊。但是，进一步的研究却已表明，“数学活动的真正领域，无论是分析或几何，都没有直接受到悖论的影响，它们只是出现于那些特别一般的领域，而这远远超出了实际使用这些学科的概念的领域。”(A.A. Fraenkel & Y. Bar-Hillel: «Foundations of Set Theory», North-Holland, 1958年，第4页.)从而，所谓的“基础危机”就只是一个历史的现象而实际上早已不复存在;与此相反，普遍为人们所接受的却是关于数学、至少是其初等部分的坚强信念。例如，斯坦纳(M.Steiner)、莱曼(H.Lehman)及克切尔(P.Kitcher)等人都曾强调指出，这是数学哲学研究的一个明显和无可辩驳的出发点:人们具有一定的数学知识，这些知识是

可靠的，也即是已经获得了证实的真理。另外，斯莱尼斯则更因此而直接引出了数学不需要认识论基础的结论。他写道："这里不存在那种可以引起对数学或至少是其初等部分的怀疑的必要的东西。因此，把数学置于一个坚实的认识论基础上这种说法是无意义的。有什么断言、什么基础能比初等数学本身的断言更加可靠呢？"（《数学需要基础吗？》，同前，第18页。）

第三，在如何解决悖论的问题上缺乏统一的意见是否就意味着数学的研究不再具有统一的基础？这就如同弗兰克尔(A.A.Fraenkcl)和巴-希勒尔(Y.Bar-Hillel)所说："促使我们谈及第三次基础危机的，远远不只是悖论在集合论基础，从而也就是在分析中的出现，而主要是由于以下的事实：在克服悖论的各种尝试中，揭示了许多在最基本数学概念上的深刻和令人吃惊的观念和意见的分歧。"（《Foundations of Set Theory》，第15页。）但是，普遍的看法是：现行的公理化集合理论，如ZF系统和BG系统，已经为数学的研究提供了一个合适的基础：这些理论的基本原则是为数学家们所几乎一致地接受的，而且，所有已知的悖论在其中都已得到了排除，同时在理论中至今也并没有发现新的悖论。

第四，数学中局限性定理及不可判定命题的存在是否表明了数学研究缺乏合理性？例如，严格意义上的相容性证明的不可能性是否就意味着我们只能永远生活在悖论的阴影之中；又如，连续统假设相对于现行集合论公理系统不可判定性的证明是否就意味着数学中对于真理性概念的使用缺乏合理的依据。针对前一个问题，普特南提出，我们不必因缺少关于古典数学相容性的证明而感到不安，因为，即使存在有这样的证明，这也只是数学内部的一个发展而并非数学的一个基础，我们不仅可以对这一证明中所用到的数学分支提出哲学性的问题，而且，在任何情况下科学所要求数学的都要比单纯的相容性多得多。一般地说，这也就是指我们不应赋予相容性特别重要的意义。另外，克里(H.B.Curr-

y)在自己的著作中也曾明确指出："古典数学的可接受性是一个经验的事实"；又"我认为，相容性的证明对于可接受性来说既不是必要的，也不是充分的。其并非充分的是显而易见的。至于就必要性而言，在没有发现不相容的情况下，相容性的证明尽管增加了我们关于这一系统的知识，但却没有改变它的可应用性；另外，即使发现了不相容的情况，这也并不意味着应当完全放弃这一系统，而只是意味着修正和改进。这也就是数学史上所实际发生的事情。例如，我们知道18世纪的数学是不相容的，但我们并没有完全放弃18世纪数学的结果。" («Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics», North-Holland, 1951年，第61-62页。)此外，维特根斯坦则更表达了这样的意见："矛盾为什么被看成是鬼怪？这的确是值得考虑的。""我相信，只要稍具想象力，就可以抛弃这种立场。"(«Remarks on the Foundations of Mathematics», Oxford: Blackwell, 1956年，第 130、170页。) 显然，这就从根本上取消了相容性证明的意义。其次，就不可判定命题的存在性而言，普特南指出，这种命题并非只存在于数学之中，从而，我们并不能判定其真值这一事实就并不足以证明这些命题本身并不具有确定的真值。另外，斯莱尼斯则更认为数学的合理性只能来自数学家的实践。例如，针对所说的连续统假设的不可判定性，斯莱尼斯写道："如果某些数学家发现接受连续统假设并相应地构造起他们的数学是富有成果的，而另一些数学家则发现拒绝连续统假设并相应地构造起他们的数学是富有成果的，那就根本不会出现哪一个是合法的、哪一个是不合法的问题。如果两者对于数学家来说都是富有成果的，那么它们都将具有它们所可能具有的最理想的合法性。"(《数学需要基础吗？》，同前，第26页。)

综上所述，在普特南等人看来，数学中并不存在基础危机，至少是现在不再存在有基础危机，从而也就不需要认识论的基础。

1.2 一个时代的终结

普特南等人的上述分析是有一定道理的。但是，这里显然又存在着这样的问题：数学基础危机能否被看成导致数学基础研究的唯一原因，或者说，数学基础研究的意义是否就仅限于解决所谓的数学基础危机？另外，从更为一般的角度说，这里所涉及的则是如下的基本问题：我们是否应当完全否定关于数学的哲学性分析的意义？事实上，先前关于已有的数学基础研究性质的分析已经为上述问题作出了明确的解答：由于对于数学基础的数学性研究是与相应的哲学性分析密切相关的，因此，对于数学性研究意义的高度评价实质上也就是对于相应的哲学性分析的积极意义的间接肯定，而这则又表明了这种分析并不只是为了解决所谓的基础危机，而是一种具有更为一般的认识论意义并对实际的数学性研究有着直接的指导性意义的工作。也正因为此，数学基础研究的历史开展就是有其必然性的。这就如同莫斯托夫斯基（A. Mostowski）所指出的，数学基础研究的必要性，"由于悖论的发现而变得更为紧迫。然而，即使在集合论中没有发现悖论，关于为集合论建立基础理论的问题也必然会得到提出和讨论。"（转引自 A.A. Fraenkel & Y. Bar-Hillel: «Foundations of Set Theory», 第 17 页，附注。）因为，理论在数量上的增长必然引起更好的论证理论、使理论系统化、批判地审查理论的基础等这样一些任务。

那么，我们究竟应当怎样去看待上述的反思性工作的意义呢？什么又是这些工作的积极因素所在呢？我们认为，这种意义事实上并不在于某些具体的结论，而是由这些工作本身所显示出来的：现代数学哲学研究正在脱离基础研究的传统框架，从而就即将告

别旧的时代而进入一个新的历史时期。

对于数学哲学正在脱离旧的基础研究的传统可以从以下几个方面进行说明：

第一，数学基础研究已不再是数学哲学研究的中心问题。这也就是说，在从事数学哲学的研究时，人们现在所考虑的一般已不再是如何为数学奠定一个永恒的、可靠的基础。例如，由于集合论在现代数学中占有特别重要的地位，关于集合概念的深入分析就是现代数学哲学的一个重要课题。但是，尽管从历史的角度看，这种研究可以看成先前的数学基础研究的继续和发展，它的性质却已发生了重要的变化：人们已不再企图通过这种研究一劳永逸地解决整个数学的可靠性问题，与此相反，这种研究现在只是全部数学哲学的一个部分，即是与公理化集合论的现代发展直接相联系的哲学性思考。特殊地，麦克兰(S.Maclane)曾专门对所谓的“大集合论基础”的理论进行了批判——按照这种理论，“数学正是能够用证明的逻辑规则从集合论的ZF公理系统得到发展的一门学科”。麦克兰指出：“大集合基础是对数学的错误片面的观点……这个伟大的理论确实成功地表明了数学严密性的特点，但在强调这点的同时忽略了关于数学本质的其它要点。”(参见第2章)也正因为此，麦克兰明确地断言：“数学哲学的目的在于对数学本质的理解，而不在于数学的‘基础’。”(《数学模型》，载《自然杂志》，1986年，第一期。)

正因为数学基础的问题已不再是数学哲学研究的中心论题，因此，与先前的研究相比，现代的数学哲学研究就其论题而言也就发生了重要的变化。这种变化在一定意义上可以说是一种“回归”。因为，现代数学哲学在很大程度上可以说是围绕数学的本体论问题和认识论问题展开的，而这些则正是早期的数学哲学研究的主要论题。然而，这又毕竟是一种“螺旋式的上升”：由于现代数学哲学是以数学自身的发展及先前的基础研究为特定背景从事研

究的，因此，与早期的数学哲学研究相比，就必然地达到了新的更高的分析水平。例如，现代数学哲学中的柏拉图主义就其本身而言具有十分悠久的历史，然而，由于这是在现代背景下进行思考的结果，因此，现代的柏拉图主义与其原始形式相比就获得了不同的意义。另外，由于数学基础研究的时代是一个多学派的时代，而这众多的“主义”则又为新的思考提供了必要的基础，因此，现代的数学哲学研究往往也就带有很强的批判性色彩，而这事实上就可看成从“元数学哲学”的高度进行分析的结果。

第二，对已有的观点的不满，并认为应当寻找新的“出路”。这的确是一种十分普遍的情绪，就是现代的数学哲学家们几乎一致地对基础研究时代中所提出的各种观念感到不满。例如，尽管鲁滨逊把1890年至1940年的这50年称为数学哲学的黄金时代，但他在同一论文中紧接着又写道：“我感到所有那些作为数学的哲学基础提出来的观点都具有严重的缺陷和困难。”(《Formalism 64》，同前，第228—229页。)另外，普特南则采取了更为直接的批判立场：“我希望我们能对数学真理、数学‘对象’和数学的必然性等进行澄清，但我并不认为数学哲学中各种著名的‘主义’能够导致这样一点”；“我希望能使你们相信：数学哲学中的各种体系无一例外地都是不用认真看待的。”(«Mathematics without foundations»，同前，第45、43页。)

当然，单纯的批判并不能构成实际的进步，我们更不应消极地停留于悲观的情绪之中，① 从而，对于现代的数学哲学家来说，一

① 这种悲观的情绪无疑是存在的。例如，柯亨就曾这样写道：“读者无疑会感到渗透在这些态度之中的深沉的悲观主义的调子。数学仍可能像是普罗米修斯的劳动，它充满活力、生机和伟大的奇迹，也包含着压倒的自我怀疑的种子。……这就是我们的命运：在怀疑中生活，追求一个其绝对性是我们没有把握的学科。”(P.J.Cohen:《Comments on the Foundations of Set Theory》，载《Axiomatic Set Theory》，ed.by D.S.Scott，第15页。)

个首要的问题就是如何去开拓新的途径。这也就如卡尔马在感叹“数学基础现在看来进入了一个悲观的、停滞的阶段”以后所指出的：“因此，我们应当提出这样的问题：数学的基础——今在何方？”卡尔马并具体解释道：“我并不企图对这一问题作出任何确定的回答。毫无疑问，人们将沿着现今的研究道路继续前进，并有可能获得有兴趣的结果，但我并不认为我们可以用这样的方法使一块消亡的土地重新变得富有生命力”，从而，我们就必须寻找新的出路。（同前，第192页。）另外，当赫斯(R.Hersh)在提出“复兴数学哲学的一些建议”时，他所考虑的显然也是同样的问题：“今天，我们不需要继续逻辑主义、形式主义或直觉主义各‘学派’的主张，而应该有一个新的起点。”（载《数学译林》，1981年，第一期，第52页。）①

由于认为“目前数学哲学面临的绝境起因于从弗雷格、罗素到布劳维尔、希尔伯特和哥德尔那样一个争论数学基础的伟大时代”，因此，普遍的看法是：“为了超越这些学派，必须用历史的眼光回顾他们的出发点，看看他们有哪些共同之处……”例如，赫斯写道：“今天，当我们回顾他们全都失败的历史时，注意他们共有的预设比注意他们之间被如此强调的差异更为重要。把这些预设摆在桌面上加以质疑，就能使我们逃离苦海，数学哲学在那里已被困陷了50年之久。”（同上，第52、57页。）事实上，前所指出的研究重点的转移就是这种反思性工作的一个直接结果；而且，应当强调是，这种转移事实上包含了一种更高层次的考虑，即究竟应当怎样去从事数学哲学的研究。例如，赫斯就曾明确指出：“我们不

① 赫斯并曾对今天的数学家由于“哲学上无知与无能”而陷入的困境作了形象的描述：“一个典型的‘正在工作的数学家’在工作日是个柏拉图主义者，在星期天则是形式主义者。换言之，当他搞数学时，他确信正在研究一种客观的实在，正在试图决定它的性质。但是，当被问及这些实在的哲学含义时，他能够用来防身的最简单遁词却是：他根本不相信数学的实在性。”赫斯指出，这种哲学上的困境“显然会给〔数学〕教学、研究以及数学组织机构的实际工作带来不良后果。”（同上，第52页。）

必去继续寻找基础而徒劳无功；我们也不必因缺乏基础而迷惑徘徊或感到不合逻辑；我们应把数学看成是一般的人类知识的一部分。我们能够试着分析数学究竟是什么，亦即，真实地反映当我们使用、讲授、发现或发明数学时所作的事。"这也就是说，我们应当采取一种不同的哲学态度，而"这意味着不承认任何一种先验的哲学信条有权告诫数学家应该做什么，或者宣称他们正在不由自主地或不知所谓地做着什么"；恰恰相反，"数学哲学的任务应是阐明数学家们正在做什么"，因为，数学哲学应是指"正在工作的数学家们的活的哲学，即研究人员、教师和使用数学者对他们所从事工作的哲学见解。"(《数学译林》，1981年，第二期，第75—76页；第一期，第52页。)

另外，由于逻辑主义等学派从总体上说所采取的都是一种反经验的理性主义立场，即认为数学的可靠性问题应当依靠纯理性的思维而不能依靠经验(实践)得到解决，因此，作为对基础研究的一种"反动"，现代数学哲学研究的又一重要特点就是经验主义已经成为一个重要的思潮。来自社会主义的匈牙利的卡尔马所提倡的可以说是一种较为"正统"的观点。如他所说："我们为什么不承认，与其它科学一样，数学最终也是建立在实践之上并是由实践来检验的呢？"(«Foundations of Mathematics–Whither now?»，同前，第193页.)此外，欧美的一些学者则在各种不同的背景下发展起了多种各有特色的经验主义数学理论(见第三章)。应当指出的是，这种现代的经验主义数学观与传统的经验主义观点(这是以穆勒〔J.Mill〕为主要代表的)相比有着重要的区别。例如，现代的经验主义通常并不认为数学命题即是建立在直接经验之上的归纳命题；另外，在对数学的经验性加以肯定的同时，他们往往又突出地强调了数学的拟经验性。经验主义的这种发展归根结蒂地说是由数学本身的发展所决定的，而这事实上也就是决定数学哲学历史发展的主要因素(参见第4章)。

第三，数学基础的研究在很大程度上可以说是一种封闭式的研究，即是与一般的科学哲学研究、甚至一般的数学研究完全相隔离的。然而，现代的数学哲学研究却表现出了明显的开放性。一般地说，现代数学哲学不仅由现代的科学哲学研究吸取了有益的思想和方法，而且也通过直接的“移植”获得了新的研究问题。例如，拉卡托斯所倡导的拟经验数学观事实上就是把波普尔的证伪主义科学哲学理论推广应用到了数学领域；另外，现代数学哲学中关于数学知识的增长及其合理性问题的研究（见第5章）则显然是一般科学哲学中关于科学知识的增长及其合理性问题的研究在数学中的直接“反响”；最后，现代的数学哲学家之所以普遍重视数学史的研究则就可以看成由科学哲学的研究所获得的方法论上的教益。这就如同赫斯所指出：“库恩(T.Kuhn) 的名著是深入这类科学哲学问题的典范，它只有基于对历史的研究才成为可能。这类工作必须在数学史和数学哲学领域开展下去。”（《复兴数学哲学的一些建议》，同前，第78页。）

作为研究领域扩展的又一迹象，数学方法论的研究也已成为现代数学哲学的重要组成部分，并已取得了一些重要的成果。这里所说的数学方法论是指对于数学的发展规律、数学的思想方法及数学中发现、发明与创造等法则的研究。由于数学基础研究所关注的仅仅是数学理论（在可靠基础上）的逻辑重建，因此，从事基础研究的数学哲学家们对于数学发现及数学的实际发展等问题是不关心的（这种倾向更由于一般科学哲学理论中关于发现与检验的严格区分得到了进一步加强）；然而，数学方法论的研究事实上却是联系数学哲学与一般数学研究的一座桥梁（交界点）：作为数学的哲学分析，数学哲学既是一种抽象的哲学理论，同时又应具有明显的方法论意义；另外，实际的数学家们又往往是通过方法论问题的思考而上升到了哲学的高度。正因为数学方法论的研究具有重要的理论和实际意义，这种研究在现代数学哲学中就

必然地得到了一定的发展(见第 6 章)。在这一方面波利亚(G.Polya)与拉卡托斯的研究是特别重要的:波利亚以"素朴而现代化的形式"复兴了数学启发法,从而为现代数学方法论的研究奠定了必要的基础;拉卡托斯则发展起了自己独特的数学发现的逻辑,从而标志着数学方法论的研究达到了新的更高水平。另外,应当特别提及的是,数学方法论的研究在我国也已得到了积极的开展,并已取得了一些有意义的成果。

综上可见,无论就研究的性质、或是就研究的深度与广度而言,现代的数学哲学研究与先前的基础研究相比都已发生了重要的变化,从而,我们就可毫不夸张地说,数学基础研究的时代已经结束,数学哲学正在进入一个新的历史发展时期。

1.3 元数学哲学的研究

在以下各章中我们将分别对关于集合论的哲学思考、经验和拟经验的数学观、模式观的数学哲学理论、数学知识的增长及数学方法论的研究等专题作集中的论述,在此则将首先对元数学哲学意义上的现代研究作一简单的介绍和分析。

犹如数学与元数学的对立一样,我们在此也是在与数学哲学相对立的意义上使用元数学哲学这一名词的。这就是说,在元数学哲学的研究中,我们所关注的已不是如何去发展某一具体的数学哲学理论,而是以数学哲学本身为对象来进行研究。例如,以下的问题都属于元数学哲学的研究范围:什么是数学哲学研究的主要问题?一个好的数学哲学理论应当满足什么样的条件?什么是数学哲学研究的主要困难?等等。显然,与一般的数学哲学研究相比,元数学哲学的研究达到了新的更高的抽象水平,而这事

实上也就表明了元数学哲学的研究何以在现代得到开展的必然性：由于现代的数学哲学研究是在数学基础研究这一特定的背景下开展的，而数学基础的研究则是一个多学派、多观点的时代，从而就为更高层次上的总结及综合分析提供了现实的可能性。另外，通过元数学哲学的研究我们又可看出现代的数学哲学家是在怎样的认识框架中进行活动的，而这也就更清楚地表明了现代数学哲学研究已经摆脱了基础研究的传统并进入了一个新的历史发展时期。

1. 赖特关于数学哲学研究问题的分析

赖特(C. Wright)是英国现代较为著名的数学哲学家。他在这一领域内的主要著作有《维特根斯坦论数学基础》(«Wittgenstein on the Foundations of Mathematics», London, Duckworth, 1980年) 和《弗雷格关于数是客体的观念》(«Frege's Conception of Numbers as Objects», Aberdeen Univer. Press, 1983年)。在围绕数学哲学问题所进行的学术交流中，赖特教授向笔者提供了即将发表的一篇论文的底稿，其中的第1章即为关于什么是数学哲学研究的主要问题的分析。应当指出的是，赖特在此所提供的并非是一个罗列式的问题清单，而是力图揭示各个问题间的内在联系，从而，这也就是关于数学哲学的一个整体性的分析和描述。

赖特指出，现代的数学哲学研究(至少就英语国家而言)主要是围绕以下的六个问题展开的：

(1) 纯粹数学的命题是否应当用“真”和“假”这样两个概念去进行评价？如果是的话，这又是一种什么样的“真”和“假”的概念？

赖特指出，形式主义和后期的维特根斯坦在这个问题上分别采取了两种极端的立场：按照形式主义的观点，一切数学对象都是无意义的符号或符号串(序列)，我们在数学中所从事的则就是按照事先给定的法则对无意义的符号或符号串进行机械的组合和变

形，从而，对数学命题来说根本就无真理性可言；另外，后期的维特根斯坦则提出了这样的见解，认为我们可以对数学命题使用“真”和“假”的概念，但是，它们又都是所谓的规范性命题，即是表明了应当如何去使用有关的概念，也即是一种纯粹的语言规则。

(2) 如果认为真理性概念为纯粹数学命题的评价提供了实质性的标准，那么，这种命题在这种标准下是否为真？

赖特指出，在这一问题上存在着如下的极端观念，即认为所有的数学命题都为假，因为，具有所说性质的数学对象是根本不存在的。

(3) 如果对问题(1)和(2)作肯定的答覆，那么，是什么使得数学命题成为真的？

这一问题也可表述为：

纯粹数学的命题所涉及的是什么样的事物或状态？

就上述问题而言，赖特指出，除去柏拉图主义和直觉主义（更一般地说，就是各种构造主义）这两种极端形式以外，还存在有其它一些可能的解答。例如，按照条件真理论者的观点，数学并无自已的对象，而只是表明了由什么样的前提可以推出什么样的结论；另外，除柏拉图主义以外，对数学命题的真理性也可作出其它的实在论的解释。

与问题(3)直接相联系的还有以下的问题：

(4) 我们是怎样获得关于真的数学命题的认识的？

显然，按照通常的划分标准，问题(3)属于本体论的范围，问题(4)则属于认识论的范围。另外，犹如实在论与非实在论在本体论问题上构成了基本的对立，在此则有先验论与经验论的直接对立。

赖特指出，无论我们在数学的认识论问题上采取怎样的立场，又都必须对数学证明的性质作出明确的分析。显然，这是由数学的特殊性所决定的。

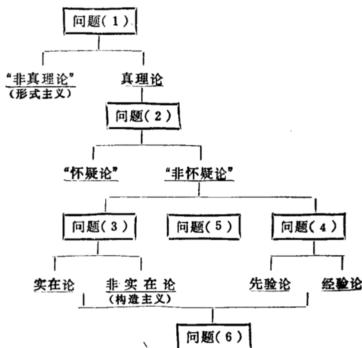
（5）在纯粹数学中，真理能否超出可证明的范围？

赖特指出，这是现代数学哲学中一个十分活跃的论题，因为这事实上关系到了什么是命题的真理性条件这一十分重要的基本问题。

最后，如果认为数学具有自己的特殊对象的话，我们则又必须回答以下的问题：

（6）数学为什么能应用于普通的事物？数学命题由证明而获得的可靠性是怎样转移到它的应用之中的？

按照上面的分析，对于数学哲学的主要研究问题及有关论点就可简单归结如下：



由于所说的"非真理论"（形式主义）即可看成非实在论的一种极端形式（唯名论），所说的"怀疑论"又是以承认数学命题包含了本体论上的承诺为必要前提的，因此，在所说的意义上，我们又

可把数学对象的实在性问题（本体论问题）及数学的认识论问题看成现代数学哲学研究的主要问题。最后，由于后两个问题又可分别说成关于数学真理（命题）的客观内容及认识论状态的分析，问题(5)和问题(6)显然也是围绕数学真理性的问题展开的，因此，归根结蒂地说，现代数学哲学即是关于数学真理性问题的全面分析。

赖特还曾明确地强调了上述的分析对于具体的数学哲学研究的指导意义。赖特指出，为了在数学哲学的研究中取得真正的进展，我们必须同时考虑上述的6个问题，而不应把自己的研究局限于其中的任何一个。因为，对于某一问题来说似乎是十分可取的一种观点，在接受其它问题的检验时就可能暴露出严重的缺陷。显然，这一"方法论上"的结论也就更为清楚地表明了上述研究的元数学哲学的性质。

2．本体论与认识论问题上的两难处境

所谓"本体论与认识论问题上的两难处境"，是美国学者伯纳塞洛夫(P. Benacerraf）对数学哲学研究中一个主要困难的形象描述。正像这一术语所已清楚地表示出来的，伯纳塞洛夫在此所论及的主要是以下的事实：那种在本体论上看来较为理想的理论在认识论上却具有严重的缺陷；反之，在认识论上较为可取的理论在本体论上却又不是那么令人满意。从而，从总体上说，我们就陷入了一种两难的处境。

伯纳塞洛夫是普林斯顿大学的哲学教授，他与普特南联合主编的《数学哲学论文集》被公认为这一领域内最重要的参考著作（关于这一著作我们在下面还将有所涉及)。作为这一选集的主编之一，伯纳塞洛夫显然必须跳出具体的数学哲学研究的圈子，而从更为一般的角度去进行分析。从而，他能从元数学哲学的高度对已有的各种观点进行综合分析，并进而指出数学哲学研究中的一个主要困难也就是不足为奇的了。

具体地说，我们在此所涉及的主要是伯纳塞洛夫在1973年发表的一篇论文《数学真理》(«Mathematical Truth»,载«Philosophy of Mathematics, Selected Readings», Second edition, Cambridge Univer. Press, 1983年.)。伯纳塞洛夫是以整个哲学为背景从事这一研究的。

首先，犹如一般哲学中关于本体论与认识论的区分一样，伯纳塞洛夫认为，我们也可以从这样的角度对数学哲学中的各种观点进行综合的分析。

例如，伯纳塞洛夫指出，按照对数学命题(的真理性条件)是否作实在论的解释，我们即可把各种数学哲学观归结为如下的两类：一是所谓的标准观点，包括柏拉图主义等；另一则是所谓的"组合观点"，即如把"真理性"等同于"可证明性"及约定论等。按照伯纳塞洛夫的观点，两者的区分可以表述如下：在前者那里，真理性概念是一个语义学的概念，后者则把真理性概念看成是语法的而并非是语义的。

其次，出于数学哲学与一般哲学一致性的考虑，伯纳塞洛夫认为，这是一个好的数学哲学理论所应满足的一个基本条件：任何关于数学真理的理论应当是与一般的真理性理论相一致的；又由于认为塔尔斯基(A. Tarski) 的真理性理论是唯一可接受的真理性理论，因此，在伯纳塞洛夫看来，最终也就可以引出这样的结论：一个好的数学哲学理论应对数学命题的真理性作塔尔斯基意义上的解释，也即应当借助命题的题材(内容)来对这些命题的真理性进行说明，从而，相应的真理性概念就应当是一种语义学的概念。

显然，按照所作的分析，上述的标准观点就是较为可取的，这事实上也就是伯纳塞洛夫何以把这种观点称为"标准观点"的原因；与此相反，各种组合的观点则是与上述要求直接相抵触的，从而就是不那么令人满意的。

第三，从认识论的角度出发，伯纳塞洛夫认为一个好的数学

哲学理论又应满足另一个基本条件，即应包括一种合理的认识理论，也即应对我们拥有一定的数学知识这一事实作出合理的解释。

就上面所提到的两种观点而言，伯纳塞洛夫指出，组合的观点在这一问题上具有明显的优越性。例如，如果把真理性等同于可证明性，那么，关于数学命题真理性条件的分析事实上也就说明了我们何以可能获得一定的数学知识。与此相反，标准观点在认识论问题上却暴露出了明显的问题和缺陷。因为，按照伯纳塞洛夫的观点，一个可以为人们所理解的认识理论应当是因果性的，也即应当对命题p（的真值条件）与作为认识主体关于p的信念的基础的东西之间的关系作出明确的说明。然而，由于数学对象并非物理的存在，数学知识就不可能建立在感性经验之上，从而，所说的标准观点就无法对数学的认识论问题作出合理的解释。

第四，对上面所说的两点进行归纳，我们就立即得出了以下的结论：那种在本体论上看来较为理想的理论在认识论上却具有严重的缺陷；反之，在认识论上较为可取的理论在本体论上却又不是那么令人满意的。伯纳塞洛夫进一步指出，对于本体论与认识论的片面强调事实上也就是导致上述标准观点与组合观点的一个重要原因。

由于一个好的数学哲学理论应当是一个综合的理论，也即应当同时满足上述的两个基本条件，因此，我们在此就陷入了一种两难的处境："这是令人不满的——并不是因为我们缺乏关于数学真理的看上去令人满意的解释，也不是因为缺乏关于数学知识的看上去令人满意的解释——而是因为缺乏一种能把这两者令人满意地结合在一起的解释。"（《Mathematical Truth》，同前，第405页。）又由于认为各种已有的数学哲学理论都未能逃脱这样一种厄运，因此，在伯纳塞洛夫看来，上述分析也就清楚地表明了数学哲学研究中的一个主要困难。

3. 悖论解决方案的评价标准

按照现代的理解，科学哲学即是关于科学理论的评价理论，进而，元科学哲学则是关于科学哲学理论的评价理论，也即研究什么样的科学哲学理论是可接受的（或者说，在比较的意义上是更为可接受的）。（对此例如可参见拉卡托斯：《科学研究纲领方法论》，第二、三章，上海译文出版社，1986年。）显然，按照这样的理解，元数学哲学也就可以定义为关于数学哲学理论的评价理论。这一定义与先前所给出的关于元数学哲学的解释是一致的。因为，无论是关于数学哲学研究问题的论述，或者是关于数学哲学研究的困难的分析，其最终目标都可看成是提供了一个好的数学哲学理论所应满足的条件。从而，在元数学哲学的研究中，我们就应特别注意数学哲学理论的评价问题，并应努力去建立这样的标准，它们可以被用于各种具体数学哲学理论的实际评价。也正是出于这样的考虑，由英国女学者哈克(S. Haack)所提出的关于悖论解决方案的评价标准就可被看成一种典型的元数学哲学的研究，而我们则更可以由此而获得关于一般的数学哲学研究的有益启示。

哈克是英国沃力克(Warwick)大学的哲学教授，主要从事哲学逻辑和逻辑哲学的研究。由于悖论的问题无论对于数学哲学或逻辑哲学来说都是一个十分重要的课题，因此，哈克在自己的著作《逻辑哲学》(《Philosophy of Logics》, Cambridge Univer.press, 1978年)中也就用较大的篇幅对悖论的问题进行了专门的讨论。

哈克是这样来引进关于悖论解决方案的评价标准的："在对所已提供的解决方案进行评价前，我想较为明智的作法是先来弄清什么可以看成是一个(真正的)解决方案。"(第138页)显然，这就清楚地表明了这一研究的元数学哲学(或逻辑哲学)的性质。

具体地说，哈克认为，悖论的解决方案应当满足以下的两个

条件：

（1）形式的要求。这是指应当给出一个相容的形式理论。从反面说，也即是指应当明确地指出先前的（不相容）理论中哪些（看上去没有问题的）公理或推理规则是不应当接受的。

（2）哲学的要求。这是指应当对上述理论的合理性作出独立的（即不同于“它们是相容的”）说明。从反面说，也即是指应对被拒斥的公理或推理规则的不合理性作出独立的（即不同于“它们导致了悖论”的）说明。

例如，著名的罗素悖论可以构造如下：

（1）构成集合$S_0=\{X \mid X\notin X\}$；

（2）考虑“S_0是否属于S_0”？

（3）由排中律，这时必然有$S_0\in S_0$或$S_0\notin S_0$但不论由$S_0\in S_0$或$S_0\notin S_0$，总可推出矛盾，故矛盾是不可避免的。

由此可见，罗素悖论的构造事实上包含了如下的前提：

（1）对任意的X来说，“$X\in X$”总是一个有意义的命题；

（2）由任一谓词出发，只要它对所有的对象都是有意义，就可构造出相应的集合：它是由所有满足这一谓词的对象所构成的。这也就是素朴集合论中的概括原则。

（3）对所构造的S_0也可考虑“S_0是否属于S_0”的问题。

（4）排中律在集合理论中是有效的。

因而，从技术上讲，我们就可通过否定其中的任何一条来排除罗素悖论，而这事实上也就是（分支）类型论、ZF系统、BG 系统及多值逻辑的作法（详可参见夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第三章）。然而，作为一个真正的解决方案，单纯从技术上加以开展是不够的，还必须从哲学上对这一作法的合理性加以说明。这样，我们也就从“形式的要求”过渡到了“哲学的要求”。

最后，哈克又补充道，我们还应对解决方案的有效性作出进一步的分析。这也就是说，就所作出的限制而言，一个真正的解

决方案既不应如此之广泛以致排除了我们所希望予以保留的推理形式，同时则又应当足够的广泛以排除所有有关的悖论。

显然，哈克在此主要是从逻辑哲学的角度进行分析的：她所考虑的主要是如何排除悖论的问题；而如果从逻辑的立场转移到数学哲学之上，也即围绕以下的问题进行考虑的话：如何用新的相容的(公理化)集合理论来取代旧的不相容的(素朴)集合理论，对于所说的补充条件我们就应作如下的"修正"：新的集合理论应当足够广泛以保留原来的集合理论中一切有价值的成分，同时又应对这些原则加上足够的限制以排除所有有关的悖论。

由于上述的考虑可以说是一种(纯)数学性的要求，并且已经包括了前述的"形式的要求"，因此，归根结蒂地说，数学中对于(集合论)悖论的解决就应满足以下的两个条件。

(1) 数学的要求。新的集合理论应对素朴集合论的原则加以足够的限制以排除悖论，也即应当是一个相容的理论，同时又应足够广泛以保持原来理论中一切有价值的成分，也即应当仍然可以起到(数学的内在)基础的作用。

(2) 哲学性要求。应当为新的集合理论的合理性提供独立的、也即哲学性(而非数学性)的论据。

从集合论的现代发展看，数学家们所首先关注的无疑是"数学的要求"；然而，上述关于悖论解决方案所应满足的条件的分析则又清楚地表明了对集合概念进行深入哲学分析的必要性和必然性——也正因为此，这种分析就构成了现代数学哲学研究的一个重要组成部分。

尽管哈克主要是就悖论的解决方案进行讨论的，但是，上面的分析对于一般的数学哲学研究显然也有着直接的指导意义：为了对已有的各种数学哲学理论进行评价及更为有效地从事新的研究，较为明智的作法也应首先建立关于数学哲学理论的评价标准。一般地说，这种"元标准"的探讨正是元数学哲学研究的一个重

要内容。例如，即如前面所已指出的，关于数学哲学的研究问题及其主要困难的分析就都包含了这一方向上的工作。另外，古德曼(N. Goodman)则更明确地提出了所谓的"客观性原理"，并以此为依据对现代数学哲学中的几个主要流派(形式主义、直觉主义、逻辑主义及柏拉图主义等)进行了分析和批评。他写道："一种严肃的数学哲学一定要满足客观性原理，即它不能否定：具有实践地真实的数学活动的任何方面也具有客观地真实。"(《数学是客观的科学》，载《世界科学》，1982年，第八期，第55页。)又例如赫斯在《复兴数学哲学的一些建议》中所提倡的则可以说是一种"实践的标准"，即认为我们不应"按传给我们的偏见来想象数学是什么，而应根据实际经验(指数学经验——注)描绘它。"特殊地，就数学对象的本体论问题而言，赫斯指出："日常经验告诉我们数学研究或数学知识有哪些主要性质呢？①数学对象是由人们发明或创造的；②它们不是随心所欲地被创造出来，它是在已有的数学对象的基础上经加工提出的，是由于科学和日常生活的需要提出的；③数学对象一经被创造，就具有完全确定的性质，我们要发现这些性质也许存在巨大的困难，但它们独立于我们有关它们的知识之外存在着。"赫斯认为："这三点是必需要理解的经验事实……我们应做的是去分析它们的佯谬，检查由此推出的哲学结论。"(《复兴数学哲学的一些建议》，同前，第76页。)

综上可见，元数学哲学的研究对于具体的数学哲学研究有着重要的指导意义。也正因为此，这两者在实际的研究中就往往是互相渗透、彼此不可分割地联系在一起的。事实上，在以下各章的讨论中，我们都可看到元数学哲学与数学哲学相互渗透的现象。

第2章　集合论的哲学思考

集合论的哲学思考在现代数学哲学中占有十分重要的地位。对此可以通过《数学哲学论文集》(《Philosophy of Mathematics,Selected Readings》, ed. P. Benacerraf & H. Putnam)两个版本(1964年,1983年)的比较清楚地看出。正如该书的两位主编伯纳塞洛夫与普特南在"二版序言"中所指出的，只须将两个版本的目录粗略地加以对照，就可看到两者之间存在着重要的区别。特别是，第一版中的第四部分"维特根斯坦论数学"在第二版中整个被删除了，取而代之的则是归属于"集合的概念"这一标题下的一系列文章。由于作出新版的一个重要原因就是为了"反映过去的20年中这一领域内的发展趋势"，因此,上述的变化就清楚地表明了关于集合理论的哲学思考在数学哲学现代发展中所占据的重要地位。

数学哲学的上述发展是有其必然性的。首先，从历史的角度看，现代关于集合理论的哲学思考在一定意义上即可看成先前的数学基础研究的继续和发展：由于以往的研究已经清楚地表明了集合的概念和方法在整个数学中所占据的重要地位，悖论的发现及有关的争论则

又表明了"在一切数学理论中比其它任何理论更需要澄清的就是集合论"(莫斯托夫斯基:《数学基础研究三十年》,华中工学院出版社,1983年,第2页),因此,数学哲学家们自然就把注意力集中到了集合论之上。其次,就其实际发展而言,这种研究又是与集合论自身的发展直接相联系的:与康托的素朴集合论相对立,现代的集合理论普遍采取了公理化系统的形式,并已发展成为现代数学(更准确地说,是数理逻辑)的一个独立分支——公理化集合论。上述发展主要是一种数学性的研究,然而,这种研究又必然会引起相应的哲学思考。例如,对于集合概念的分析事实上就可看成关于公理化集合论合理性的证明;另外,作为数学哲学基本问题在集合论中的具体表现,人们必然地会考虑如下的问题:集合是一种什么样的存在?我们又是怎样获得集合论的知识的?……这样,随着集合论研究的逐步深入,关于集合理论的哲学思考也就得到了自然的发展。

综上所述,现代数学哲学中关于集合理论的哲学思考事实上包括了这样两个部分:一是关于集合这一特定概念的分析,二是与集合论有关的数学哲学问题的研究。下面我们就分别对这两个方面进行介绍和分析,又由于这两种研究都是与公理化集合论的现代发展直接相联系的,因此,我们将首先对公理化集合论作一简要的说明。

2.1 公理化集合论的研究

公理化集合论是相对于康托的素朴集合论而言的,其主要特征在于:在公理化集合论中,我们只能由公理出发去推出进一步的结论(定理),而不能(直接)求助于相应的素朴观念或直觉。这

也就是说，在公理化集合论中，集合(及有关的概念)被看成是不加定义的原始概念，它(们)所具有的只是公理所规定的性质。公理化集合论有ZF系统、BG系统、NF系统和ML系统等。其中，ZF系统是最早得到建立的，并已事实上为大多数数学家所接受。下面就围绕ZF系统对公理化集合论进行介绍。

1. Z系统、ZF系统和ZFC系统

德国数学家策墨罗(E. Zermelo)是现代公理化集合论的主要奠基人之一。他曾对发展公理化集合论的指导思想作了十分明确的说明。他写道："我们应当以历史上遗留下来的集合理论为出发点去寻找那些为建立数学的基础所必须的原则。在解决这一问题时，我们必须一方面对这些原则加上足够的限制以排除悖论，另一方面则又必须使它们足够广泛以保留理论中一切有价值的东西。"(转引自Wang Hao: «From Mathematics to Philosophy», Routledge & Kegan Paul Ltd.,1974年，第190页.)(从而，按照前一章中关于"数学的要求"与"哲学的要求"的区分〔1.3节〕，策墨罗在此所考虑的就主要是"数学的要求"。)

策墨罗所说的"原则"，事实上就是公理化集合论中的公理。对此可以分别就所谓的策墨罗系统(Z系统)、策墨罗-弗兰克尔系统(ZF系统)和ZFC系统进行介绍。

除去逻辑的概念以外，策墨罗系统还包括"集合"和"属于"(用符号"$\in$"表示)这样两个原始概念，相应的公理则有如下的8条：

(1) 外延性公理：

$(x)(y)((z)(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y)$

这就是说，集合是由它的元素所唯一决定的。

(2) 空集存在性公理：

$(\exists y)(x)(\sim x\in y)$

即存在有不包含任何元素的集合。这也就是所谓的"空集"(以下用

符号Λ“”表示)。

(3) 对偶公理:

$(z)(w)(\exists y)(x)(x\in y\leftrightarrow(x=z\vee x=w))$

这就是说,对任意的集合z和w来说,存在有仅以z和w为元素的二元集(可用符号“$\{z,w\}$”表示)。

(4) 并集公理:

$(z)(\exists y)(x)(x\in y\leftrightarrow(\exists w)(x\in w\&w\in z))$

这就是说,对任一集合z来说,存在有这样一个集合,它的元素就是z的各个元素(集)中的元素。这一集合就称为z中各元素集的并集。

例如,设 $z=\{w_1,w_2\}$,$w_1=\{1,2,3\}$,$w_2=\{4,5\}$,并集公理所肯定的就是以下集合的存在性:$y=\{1,2,3,4,5\}$。

(5) 幂集公理:

$(z)(\exists y)(x)(x\in y\leftrightarrow(w)(w\in x\rightarrow w\in z))$

这就是说,对任一集合z来说,存在有这样一个集合,它的元素就是z的各个子集。这一集合称为z的幂集(用符号“Pz”表示)。

例如,设 $z=\{2,3\}$,z 的子集即为

Λ,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{2,3\}$,

从而,$Pz=\{\Lambda,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$。

(6) 无穷公理:

$(\exists y)((\exists x)(x\in y\&(z)\sim z\in x)\&$

$\&(x)(x\in y\rightarrow(\exists z)(z\in y\&(w)(w\in z\leftrightarrow(w\in x\vee w=x))))$

z称为x的后继,如果 z 的元素即为 x 的元素或 x 自身。例如,设 $x=\{2,3\}$,则 $z=x$的后继$=\{2,3,\{2,3\}\}$。

从而,无穷公理所肯定的就是这样一个集合的存在性,空集是这一集合的元素,而且,如果任一集合x属于它的话,x的后继也一定属于这一集合。

(7) 分出公理:

$(z)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (x \in z \& \phi x))$

其中φ是一个不包括自由变元y的谓词。(由于分出公理中包括了谓词φ，因此，这事实上就是一个公理模式，即代表了无穷多条公理。)

分出公理所断言的是，对于任一集合z来说，我们可以凭借某一谓词φ(假设这一谓词对集合z中的每一元素都是有意义的)去分出一个子集y，它是由z中所有那些满足这一谓词的元素所组成的。

分出公理是与素朴集合论中的概括原则〔$(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow \phi x)$〕直接相对应的；然而，由于依据分出公理我们只能凭借谓词由已知的集合去分出一个子集，而不能由谓词直接去得出相应的集合，因此，用分出公理代替概括原则就避免了由此而产生过大集合(并进而导致悖论)的弊病。

(8) 基础公理：

$(z)(\exists x)(x \in z \& (y)(y \in x \rightarrow \sim y \in z))$

这就是说，任一非空集合都包含有这样的“最小元素”：它与原先的集合并无公共的元素。

应当指出，策墨罗系统的形成是一个历史的过程，对此作出贡献的也并非策墨罗一人。然而，这一系统的发展过程却仍然体现了上面所已提及的两条原则，即必须对系统中的公理加以足够的限制以排除悖论，同时又必须使这些公理足够广泛以保证新的集合理论仍然能够起到“基础”(严格地说，是数学的“内在基础”)的作用，也即能够由此而开展出全部或主要的数学理论。例如，用分出公理去取代素朴集合论中的概括原则显然就是出于前一种考虑；另外，基础公理的引进则是为了排除所谓的“异常集合”① ——

① 所谓“异常集合”笼统地说，即是指在集合之间存在有“相互包含”(或“自我包含”)的关系。如$A=\{B,C\}$，$B=\{C,A\}$，$C=\{A,B\}$，

由于在异常集合上无法开展出丰富的数学理论，因此就是与后一种考虑直接相抵触的。更为一般地说，由策墨罗系统到ZF系统及ZFC系统的发展主要地也就建立在后一种考虑之上。

具体地说，ZF系统与策墨罗系统相比增加了如下的替换公理：

$$F\text{是一个函数}\rightarrow(z)(\exists y)(x)(x\in y\leftrightarrow(\exists w)(w\in z\&F(w)=x)$$

这就是说，如果F是一个函数，而且，对集合z中的任一元素w而言，F(w)也是一个集合，那么，所有这些F(w)就构成一个新的集合y。

替换公理可以看成是一种更为高级的无穷公理。因为，无穷公理所肯定的是由有穷到可数无穷的"穷竭"的可能性，替换公理所肯定的则是一般的超穷的"穷竭"的可能性。

最后，如果在ZF系统中再增加如下的选择公理，则就获得了ZFC系统。

选择公理：

$$(z)((x)(x\in z\rightarrow(\exists w)(w\in x)\&(y)(y\in z\&y\neq x\rightarrow \sim(\exists t)(t\in x\&t\in y)))\rightarrow(\exists u)(x)(x\in z\rightarrow (\exists w)(s)(s=w\leftrightarrow(s\in u\&s\in x))))$$

这一公理所断言的是，对于任一集合z来说，如果它的各个元素集是互相排斥的(即没有公共元素)，而且其中没有一个是空集，那么，就存在这样一个集合(可称为"代表元素集")，它与给定集合z中的各个元素集都恰好有一个公共元素(这一元素可称为相应元素集的"代表元素")。

2. 其它的系统

除去ZF系统以外，在公理集合论中还有所谓的BG系统、NF系统和ML系统等。对此简单介绍如下：

BG系统的思想最早是由本世纪最杰出的数学家之一冯·诺意曼(J. von Neumann)提出的。他认为悖论出现的原因并不在

于使用了太大的集合，而是由于这些过大的集合被用作其它集合或自身的元素。因此，在冯·诺意曼看来，ZF系统的作法就是不可取的，因为它排斥了过多的集合，而所需要的则只是引入适当的规定以防止那些过大的集合成为别的集合或自身的元素。

按照上述想法，冯·诺意曼建立了自己的公理化集合论，后来，贝尔纳斯(P. Bernays)和哥德尔又先后对此进行了改进，这就是所谓的BG系统。与ZF系统相比，BG系统的主要特点在于其中包括了三个初始概念：集合(set)、类(class)和属于。其中，类不能成为其它集合的元素，而集合则可以，从而后者事实上就相当于ZF系统中的集合。(另外，由于引进了类的概念，BG系统就可以以有穷公理化系统的形式得到表述，而ZF系统则因包含了公理模式不可能被有穷公理化。)

就悖论的解决而言，BG系统和ZF系统可以说是等效的，因为BG系统相对于ZF系统的相容性已经得到了证明；另外，BG系统又可看成ZF系统的一个扩充(参见下面的分析)。为了更清楚地对此进行说明，在此可借助亨金所给出的一个比喻来进行分析。亨金是以康托悖论为例来进行说明的，这一悖论可以表述如下：

依据基数理论可以证明：任一集合M的幂集PM的基数$\overline{\overline{PM}}$一定大于M的基数$\overline{\overline{M}}$，即$\overline{\overline{PM}}>\overline{\overline{M}}$。这也就是集合论中所谓的“康托定理”。

现考虑由所有集合所组成的集合S(称为大全集)。依据康托定理，$\overline{\overline{PS}}>\overline{\overline{S}}$；但由于S是大全集，PS也就是S的一个子集，从而又有$\overline{\overline{PS}}\leqslant\overline{\overline{S}}$。矛盾。

在素朴集合论中为什么会出现像康托悖论那样的矛盾呢？亨金认为，这是由于其中既包含了“不可抵挡的矛”(这是指任一集合M都可扩展到更大的集合PM，从而集合的扩展就是没有限制的)，同时又有一个“能抵御一切的盾”(这是指存在一个无法再予

以扩展的集合，也即包含有一切集合的集合：大全集），从而，就像我国古代关于矛和盾的故事一样，在素朴集合论中矛盾的出现就是不可避免的。① 那么，怎样才能避免这种悖论呢？亨金指出，我们必须或者"弃盾存矛"，或者"弃矛存盾"。ZF系统采取的即是"弃盾存矛"的作法，因为ZF系统中保留了任何集合都可以进行扩展的特性，而是通过对过大集合（特别是大全集）的排斥避免了悖论。另外，BG系统所采取的则可以说是"弃矛存盾"的作法，因为，在BG系统中虽然保存了那个由一切集合所组成的集合（准确地说，这是"类"、而不是"集合"），但由于此时已不可能作进一步的扩展（也即不可能以其为元素去构成新的集合），从而也就避免了逻辑矛盾。

应当指出的是，现代数理逻辑中已证明了如下的结论：BG系统中不含"类"这一谓词的可证句子集与ZF系统中的可证句子集是相一致的。这也就是说，BG系统事实上只是ZF系统的一个"非本质扩充"。（此外，还证明了如下的一般结论：任一具有递归可枚举的公理集的公理系统，只要加上一个新的初始谓词，都能非本质地扩张为可有穷公理化的系统。）从而，总的来说，从数学的角度看，在ZF系统与BG系统之间就并不存在很大的区别。

现代公理化集合论中的NF系统和ML系统都是由著名逻辑学家、哲学家奎因（W.V.Quine）提出的。NF系统的特点在于对概括原则中的谓词作"分层"的要求；另外，ML系统与NF系统的关系则就如同BG系统与ZF系统的关系。对于这两个系统，莫斯托夫斯基

---

① 对其它悖论也可作出类似的分析。例如，罗素悖论的构造事实上也可看成对于集合无限扩张可能性的直接肯定。因为，只需对论证形式稍作改变，我们就可证明，对任何集合M来说，由其中不属于自身的元素所组成的子集 $\{x \mid x \in M \& x \notin x\}$ 一定不是M中的元素，从而，只须把这一子集作为新的元素加入到M之中，我们就获得了扩大了的集合；另外，在这一悖论的构造中，我们同时又承认了大全集的存在性，也即肯定了集合的绝对完成性（封闭性），从而，矛盾的出现也就是不可避免的了。

曾经指出："奎因的理论曾被许多逻辑学家广泛研究，但却似乎不曾影响数学家的工作。"(《数学基础研究三十年》，第149页。)对此我们就不再予以介绍了。

2.2 集合概念的分析

当人们在谈到公理化集合论时，通常即是指ZF系统和BG系统。一般认为，策墨罗原来所提出的目标在这两个系统中已经得到了实现。因为，一则，从目前的数学实践看，这两个系统已为数学提供了一个合适的(内在)基础；再则，由于作出了必要的限制，所有已知的悖论在这两个系统中都已得到了排除（更严格地说，是不可能按照原来的方式在系统中得到构造)，而且，至今在其中也没有发现新的悖论。对于公理集合论的这种成功，数学家们无疑是感到高兴的。但是，从数学哲学的角度看，这种纯数学的考虑显然又是不够的。因为，正如前面所已指出的，作为一种令人满意的集合理论，它不仅应当满足所说的"数学的要求"，而且也应满足"哲学的要求"，也即应当为相应理论的合理性提供独立的论据。另外，应当指出，这种哲学性分析所具有的又并非仅仅是认识论的意义，而且也具有重要的方法论意义。因为，如果仅仅停留于"数学的要求"，也即策墨罗关于所选择的原则"既不应太宽也不应太窄"的标准的话，集合论的研究就具有很大的任意性：我们可以发展出多种符合上述要求但却又是彼此不相容的理论；与此相反，关于集合概念的深入分析则可能为集合理论的进一步发展，特别是新公理的选择提供一定的依据。从而，总的来说，随着集合论研究的深入，数学哲学家们就集中地从事了集合概念的分析，而这种研究的最终目的则是为了给 ZF系统和BG系

统的合理性提供这样一种论据：这两种理论与我们关于集合的直觉是完全符合的。

由于从数学的角度看在ZF系统与BG系统之间并无重要的区别，下面将仅就ZF系统进行分析。

1．集合的迭代观念

作为集合概念的哲学分析，人们提出了关于集合的迭代观念(the iterative conception of set)，并以此为依据对ZF系统的合理性进行了说明。

一般地说，所谓集合的迭代观念，即是指把集合看成这样一种对象，它是由所已给出的对象出发，通过反覆实施"汇集"的运算得到构造的。例如，早在1947年，著名的逻辑学家哥德尔就曾从这样的角度对集合的概念进行了说明。他写道："集合是这样的东西，它可以由整数(或其它的某种完全确定的对象)出发通过反覆实施'汇集'('set of')的运算而得出。" («What is Cantor's Continuum Problem?»，载«Philosophy of Mathematics, Selected Readings»，1983版，第474-475页.)哥德尔把这种观念称为"关于集合的数学观念"，并强调了这种观念与"关于集合的逻辑观念"的区分——按照后一种观念，集合是通过把已存在的东西分成两个范畴而得出的。哥德尔认为，集合论悖论的发现表明"集合的逻辑观念"是不相容的；然而，"集合的数学观念"却是相容的，① 因此，后者就可以被用以为集合论提供一个令人满意的基础。

著名数理逻辑学家王浩在《从数学到哲学》一书中对集合的迭代观念及其与ZF(C)系统的联系作了更为具体的说明。

王浩写道："按照迭代的观念，集合是这样的东西，它可以由某些基本对象出发(诸如空集，或整数、个体，或其它的某种完全

---

① 正因为此，哥德尔写道：集合论悖论是一个十分严重的问题，但这并非是就数学而言的，而是就逻辑和认识论而言的。(同上，第474页。)

确定的原元素〔urelement〕)，通过反覆实施'汇集'这样一种运算——这种运算允许把'已给出的'对象(特殊地，集合)的任意总体或其部分汇集成一个集合——而得到。"(«From Mathematics to Philosophy»，第181页.)

就上述观念的理解而言，王浩指出，第一，关于什么是原元素的问题对于集合论的研究来说是不重要的。因为，集合论的开展完全可以建立在这样的假设之上：根本不存在任何基本对象。(为区分起见，我们可以把这种集合论称为"纯粹集合论"。)第二，迭代观念的核心是以下的思想：对象(元素)必须先于集合而存在，也即集合是由已给出的对象所构成的。由下面的讨论可以看出，当数学哲学家们在谈及集合的迭代观念时，他们的思想并不是完全一致的。然而，人们通常就把"元素先于集合"这样一点作为迭代观念的主要特征。第三，"造集"的过程是一种累积式的过程，即在某一阶段及先前阶段所得出的集合都被看成是"已给出的"，从而就可以其为对象去实行新的集合的构造。第四，"造集"的过程不仅包括了有穷的迭代，而且也包括了超穷的迭代。这也就是说，这一过程是可以无限制地继续下去的，从而，从整体上说，这些集合就构成了一个完整的谱系。

王浩进而指出，"汇集"运算也即迭代观念的合理性在于以下的事实：我们可以同时想到(或看到)两个(或若干个)不同的对象(例如，两个不同的人)，也即可以在已给出的对象之间建立某种直觉的联系，而如果把这种直觉能力予以理想化，即认为我们可以同时想到或总览(run through or overview)任意多个乃至无穷多个对象，并认为可以无限制地去反覆运用这种直觉能力，这就是所说的关于集合的迭代观念。

相对于所说的迭代观念而言，王浩认为，ZFC系统的各个公理都是真的。从而，在王浩看来，这也就证明了ZFC系统的合理性。

例如，就分出公理[(z)(∃)y(x)(x∈y↔(x∈z&ϕx))]而言，王浩指出，由于z是一个集合，我们就可总览z的所有元素，在这一过程中我们当然也可作出任意的删除，特别是，在一种理想的意义上我们即可依据所说的谓词ϕ去进行判断并删除所有那些不满足这一谓词的元素，这样，我们就可总览z中所有满足谓词ϕ的元素，而这也就表明了这些元素构成了一个新的集合y。

其次，作为幂集公理[(z)(∃y)(x)(x∈y↔(w)(w∈x→w∈z)]的说明，王浩指出，依据分出公理，在给定了集合z的情况下，z的所有子集都是已给出的；进而，上面提及的我们可以作出包括某些删除的总览的能力，显然不仅保证了z的各个子集的存在性，而且也保证了我们可以总览所有这些子集。从而，这就表明了z的幂集的存在性。

就选择公理而言，则可作出如下的解释：由于元素是先于集合而存在的，因此，对于任一集合z来说，如果它是由两两互斥的非空集合所构成的，它的各个元素集中的元素就一定是先期给出的，而这也就表明了对于它们的选择可以构成一个新的集合（"代表元素集"）。

王浩关于替换公理的解释是这样的：由于z是一个集合，我们就可总览z的所有元素；如果用其它的已给出的对象F(w)去取代z的每一个元素w（F是一个函数），我们仍然可以作出相应的总览，从而，所有的F(w)就构成了一个新的集合。

最后，王浩指出，上述的迭代观念与康托的某些观点是十分接近的。事实上，康托在不同的时间与场合曾对集合的概念作过多种不同的解释。例如，康托在1883年曾这样写道："多，可以被看成是一，即是这样一个总体，它的元素由一个法则联成了一个整体。"另外，在1895年，康托则给出了如下的解释："所谓'集合'，是指把确定的、彼此可以加以区分的直觉或思维的对象m的任意组合看成是一个整体M（m就称为M的'元素'。"）（转引自« From

Mathematics to Philosophy»，第188页.）王浩指出，康托的后一种观点是与迭代观念十分接近的；另外，前一种观点则相当于哥德尔所说的关于集合的逻辑观念。与哥德尔一样，王浩也认为集合论悖论所涉及的只是集合的逻辑观念，而与迭代观念（进而，与数学）是不相干的。① 从而，总的来说，在王浩看来，集合的迭代观念就为公理集合论提供了一个令人满意的解释。

2．直觉与理性认识

对于究竟什么是集合的迭代观念，以及这一观念能否被看成公理集合论的令人满意的（认识论）基础的问题，存在有各种不同的看法。例如，曾先后在克耐尔、哈佛及哥伦比亚等大学任教的帕森斯（C．Parsons）就曾明确地提出，关于集合的迭代观念并不是一个十分清楚的观念。在1975年发表的一篇论文《什么是集合的迭代观念？》中，帕森斯这样写道：在这一论文中"我将针对现今所谓的'集合的迭代观念'提出一些问题。对于有关文献的仔细检查将会表明这一观念并不像它所应当是的那样的清楚。"（«What is the Iterative Conception of Set?»，载 «Mathematics in Philosophy»，Cornell Univer. Press 1983年，第 268页.）

具体地说，帕森斯针对王浩关于迭代观念的解释提出了这样一些问题：第一，按照迭代的观念，集合的元素必须先于这一集合而存在。但是，帕森斯认为，这种借助于时间概念的描述方法是非常不精确的。特别是，关于"汇集"的过程可以无限制地继续下去的说法更假设了某种"超穷的时间"的概念，而这显然是缺乏

---

① 具体地说，依据排中律，任一很好定义了的谓词必然或者适用或者不适用于任一已给出的对象，从而，按照集合的逻辑观念，任一谓词 ϕ 就确定了一个相应的集合 $\{x \mid \phi x\}$。这就是素朴集合论中的概括原则。然而，我们已经知道，如果不加限制地去使用概括原则，就会导致悖论。与此相反，按照集合的迭代观念，元素必须先于集合而存在，而且"汇集"的过程是可以无限制地继续下去的，从而，任何集合就都不可能成为自身的元素，而且也不可能存在有所谓的大全集，这样在按照迭代观念发展起来的集合理论中，集合论悖论就得到了排除。

明确的直观基础的。第二，针对王浩关于"汇集"的运算是一种"总览所有对象的直觉过程"的说法，帕森斯指出，这种理想意义上的直觉能力事实上是一种高度抽象的概念，从而也就不能被看成具有明确的直观基础。例如，针对王浩关于幂集公理的解释，帕森斯提出，由"我们可以作出包括某些删除的总览的能力"也即可以总览已给出集合z的任一子集，到"可以总览z的所有子集"，显然包括了一个重要的"飞跃"，而这事实上也就意味着在原先的观念中所包含的直观成分的丧失。因为，正如连续统问题的讨论所已表明的，由自然数集(这是最简单的无穷集)到相应的幂集（实数集)的过渡，即已包含了严重的认识困难(参见第三节)。这也就如帕森斯所说，"在把这一观念应用于正整数的所有集合的集合时，我就感到无法理解王浩关于'直觉地总览'的说法了。"（«What is the Iterative Conception of Set?»，'同前，第278页。)另外，就替换公理的解释而言，帕森斯认为，在"用其它的已给出的对象F(w)去取代集合z的各个元素w"时，如果认为这种替换并不改变我们对于相应总体的总览能力，这事实上就完全忽视了对象的内在结构——在帕森斯看来，这一过渡也是缺乏明确的直观基础的①。

综上所述，在帕森斯看来，集合的迭代观念就并没有为公理集合论提供一个令人满意的直观基础。

我们认为，就其最主要的结论而言，帕森斯的分析是很有道理的。因为，即使从最一般的角度去进行分析，关于集合的迭代观念也不能说是一个建立在明确直观基础上的十分清楚的观念。例如，在断言可以由已给出的对象去作出新的集合时，我们并没

① 可以通过以下的比喻对帕森斯的上述批评作进一步的说明：设想有这样一位女巫，她拥有这样一个神奇的"水晶球"，借助于它或者可以"一眼"看到世界上所有的人，或者可以"一眼"看到一个人的过去、现在和未来，今问能否用这个水晶球"一眼"看到世界上所有人的过去、现在和未来？相信大多数人的回答将是："不"。而这正是帕森斯的论点。

有清楚地说明由这些对象可以作出什么样的集合；另外，如果没有对(时间上)先后的概念作出明确的规定，我们显然也就不可能正确地去把握"迭代"的概念(特别是"超穷迭代"的概念)。

那么，我们究竟应当怎样看待集合的直觉观念，以及与此直接相联系的集合论的认识论基础的问题呢?就后一个问题而言，我们认为，除去关于迭代观念及其与ZF系统诸公理关系的具体分析以外(这正是王浩与柏森斯所从事的工作)，以下的一般考虑是更为重要的，即我们关于集合的直觉是否可能为抽象的公理化集合理论提供一个可靠的认识论基础？无可否认，素朴的直观背景对于公理集合论的研究具有重要的认识论和方法论的意义。特殊地，就集合的迭代观念而言，由于这一观念在一定程度上是可以直觉地予以把握的，也即是与人们的整个认识框架基本上相一致的，因此，在所说的意义上，这一观念就的确为ZF系统的合理性提供了一定的说明，而这事实上也就是ZF系统(及BG系统)之所以获得普遍承认的一个重要原因。(与此相反，NF系统与ML系统则就因为缺乏必要的直观基础而被认为仅仅是一种"不自然的人工设计"。)另外，这种关于集合的直觉也为公理集合论的进一步发展，特别是新公理的选择提供了一定的依据(对此例如可参见王浩：《从数学到哲学》，第六章，第四节)。一般地说，这种关于集合的直觉事实上即是为公理化集合论提供了一个"直观的模型"，而这对于抽象的理论研究当然是一种十分有用的辅助工具。从而，总的来说，关于集合的直觉也就具有直接的方法论意义。尽管人们关于集合的直觉具有重要的认识论和方法论的意义，但是，作为问题的另一方面，我们又应看到这种直觉不可能为公理集合论提供一个可靠的认识论基础。因为，第一，所谓直觉的观念并不是一种先天的认识，而是受实际认识活动(包括理性认识)的制约并且随着认识的深入而得到发展和深化的。例如，正如前面的讨论所已表明的，关于集合的直觉观念，特别是关于集合的迭代观念，本

身就是随着集合理论，尤其是公理化集合理论研究的深入逐步得到建立和发展的：在康托那里这种观念充其量只能说处于萌芽的状态；其后，在哥德尔那里，这一观念得到了初步的明确表述（在这方面还应提及米力曼诺夫〔Mirimanoff〕、冯·诺意曼、贝尔纳斯等人的工作。对此例如可参见王浩：《从数学到哲学》，第六章）；而又只是到了更后的阶段，关于集合的迭代观念才得到了较为系统的表述，而这又正是以公理化集合论的研究为直接背景的。第二，如果始终停留于素朴的、直观的水平上的话，所说的直觉就必然地只能是一种含糊的概念，而只有借助严格的形式理论，相应的概念才能得到严格的表述；然而，在后一种情况下，我们所作的就并非（或者说，并非仅仅是）由直觉去建立相应的理论，恰恰相反，我们事实上即是用理论（公理）去明确定义（或者说，重新定义）相应的概念。综上可见，在关于集合的直觉与抽象的公理化集合理论之间所存在的就并非是一种单方面的"保证"关系，而是一种既对立、又互相依赖、相互促进的辩证关系。（对此王浩也是明确承认的。如他所说："无人否认我们关于集合的直觉是发展的"；又"应当承认，迭代的观念并不是完全清楚的，一些新的公理可能将使我们的意图变得更加精确，另一些则可能以一种自然的方式对我们的观念加以扩展或修正。"（«From Mathematics to Philosophy»，第302、301页）。从而，我们也就不可能借助于关于集合的直觉来为公理化集合论提供一个可靠的认识论基础。

为了更清楚地说明关于集合的直觉与公理化集合理论之间的辩证关系，我们再来对布勒斯（G. Boolos）的有关工作作一介绍。

在1971年发表的论文《集合的迭代观念》（«The Iterative Conception of Set»）中，布勒斯也曾对集合的迭代观念及其与ZF系统的关系进行了分析。与王浩的前述工作相比，布勒斯的研究的主要特点是，他并没有由所谓的迭代观念直接过渡到（策墨罗系统和）ZF系统，而是首先发展起了一个介于两者之间的形式理

论——阶段理论(the Stage Theory)，而这事实上就可看成对于集合的迭代观念的明确说明(或部分地明确说明)。

按照布勒斯的观点，关于集合的迭代观念可以表述如下：

所谓集合即是指在下述过程中的任一阶段得到构造的总体：我们以个体作为出发点，个体并不是集合。在阶段0，构成个体的所有可能的组合。例如，如果只有一个个体a的话，在阶段0所构成的就是如下的两个集合：Λ(空集)和$\{a\}$；如果没有任何个体的话(这就是所谓的"纯粹集合论")，在阶段0所构成的唯一集合就是空集Λ。在阶段1，构成个体及阶段0所构成的集合的所有可能的组合(如果这些集合尚未得到构造的话)。例如，在只有一个个体a的情况下，在阶段1得到构造的就是如下的6个集合：

$$\{\Lambda\},\{\{a\}\},\{\Lambda,a\},\{\Lambda,\{a\}\},\{a,\{a\}\},\{\Lambda,a,\{a\}\}$$

另外，在没有任何个体的情况下，在阶段1得到构造的则是如下的集合：$\{\Lambda\}$。一般地说，在阶段n所构成的就是个体及所有在先前的阶段$m(m<n)$得到构造的集合的一切可能的组合(如果这些集合尚未得到构造的话)。另外，集合的构造是一个超穷的过程，例如，在阶段0、阶段1、阶段2……以后，就有所谓的阶段ω(ω是第一个超穷序数)，在阶段ω所构成的即是个体及所有在阶段0、阶段1、阶段2……得到构造的集合的一切可能的组合。类似地，在阶段ω之后又有阶段$(\omega+1)$，阶段$(\omega+2)$，……。一般地说，这种延伸与穷竭的过程即是与超穷序数的构造过程直接相对应的：

$$\begin{array}{lllll}1, & 2, & 3 & \cdots\cdots & \omega \\ \omega+1, & \omega+2, & \omega+3 & \cdots\cdots & \omega+\omega(\text{即 }\omega\cdot2) \\ \omega\cdot2+1, & \omega\cdot2+2, & \omega\cdot2+3 & \cdots\cdots & \omega\cdot2+\omega(\text{即 }\omega\cdot3) \\ \cdots\cdots & & & & \end{array}$$

显然，与王浩的解释一样，布勒斯在此所给出的也只是一种较为含糊的观念；然而，通过由这种素朴的描述过渡到如下的阶

段理论，关于集合的迭代观念就(部分地)得到了明确的表述：

阶段理论中所使用的语言L是这样的：变量x，y，……和r，s，……分别代表集合和阶段；另外，除"∈"(属于)和"="(等于)这两个谓词外，在L中还包含有如下的两个二元谓词：E和F，它们的意义分别为：

sEt↔阶段s先于阶段t；

xFs↔集合x是在阶段s得到构成的。

阶段理论的公理可分为两组。第一组表明了在迭代观念中所用到的阶段是怎样一种结构(如果借用帕森斯的表达方式，这也就是指在迭代观念中所采用的是怎样一种〔超穷的〕时间结构)：

L_1　(s)～sEs

这是指没有一个阶段先于自身(也即"先于"的关系是"反自反的")。

L_2　(r)(s)(t)(rEs&sEt→rEt)

这是指"先于"的关系具有"可传性"。

L_3　(s)(t)(sEt　∨s＝t∨tEs)

这就是说，在任意的两个阶段s与t之间，至少存在如下三个关系中的一个：s先于t，s等于t，t先于s(也即"先于"的关系具有"连通性")。

L_4　(∃s)(t)(t≠s→sEt)

这就是说，存在有最先的阶段。

L_5　(s)(∃t)(sEt&(r)(rEt→(rEs∨r＝s)))

这就是说，对每一阶段来说，都存在一个"紧随其后"的阶段。

L_6　(∃s)((∃t)tEs&(t)(tEs→(∃r)(tEr&rEs)))

这就是说，存在这样的阶段，它并非最先的阶段，同时也并非任一阶段的"直接后继"。显然，这就是所谓的阶段ω。

另一组公理表明了集合的构成方式：

L_7　(x)(∃s)(xFs&(t)(xFt→t＝s))

这就是说，所有集合都是在某个唯一确定的阶段构成的。

L_8　$(x)(y)(s)(t)((y\in x\&xFs\&yFt)\rightarrow tEs)$

这就是说，集合的元素先于这一集合，也即是在较先的阶段构成的。

L_9　$(x)(s)(t)(xFs\&tEs\rightarrow$

$(\exists y)(\exists r)(y\in x\&yFr\&(t=r\vee tEr)))$

这就是说，集合是在最先的"可能阶段"得到构造的。这也就是说，如果一个集合x是在阶段s得到构造的，那么，对于任一较先的阶段t来说，至少有x的一个元素y是在阶段t或在其后的阶段得到构成的。(从而，就不可能出现这样的情况：一个集合的所有元素在某一阶段前都已得到了构造，然而，如果这一集合本身尚未得到构造的话，它却没有在这一阶段得到构造。)

L_{10}　这是一个公理模式（布勒斯称之为规范公理〔Specification Axioms〕)：

$(s)(\exists y)(x)(x\in y\leftrightarrow(\phi x\&(\exists t)(tEs\&xFt)))$

其中，ϕ 是一个不包含自由变元y的谓词。

这一公理(部分地)体现了这样的思想：在任一阶段，我们可以构成在先前阶段所已构造的集合的一切可能的集合。这也就是说，在保证"元素先于集合"的原则下，我们可以使用概括原则去"造集"。

L_{11}　这也是一个公理模式(布勒斯称之为归纳公理〔Induction Axioms〕)：

$(s)((t)(tEs\rightarrow(x)(xFt\rightarrow\theta x)\rightarrow(x)(xFs\rightarrow\theta x))\rightarrow$

$(s)(x)(xFs\rightarrow\theta x)$

为了对此进行说明，可以首先引进如下的概念：

一个阶段S称为被一谓词 θ 所覆盖，如果这一谓词适用于所有在这一阶段s得到构造的集合(即θ"覆盖阶段s"$\leftrightarrow(x)(xFs\rightarrow\theta x)$)。

进而，归纳公理所肯定的就是，如果由所有先于某一阶段s的阶段t为某一谓词θ所覆盖即可推出这一阶段也为 θ 所覆盖，那么，θ就覆盖了所有的阶段，也即适用于任一集合。

布勒斯指出，由阶段理论出发，借助于逻辑演绎即可推出策墨罗系统中的所有公理。

例如，在规范公理中令$\phi x \leftrightarrow x = x$，我们就得到了

$$(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (x = x \& (\exists t)(tEs \& xFt)))$$

这就是说，在任一阶段s，都有这样一个集合y，它是由所有在先前阶段得到构造的集合所组成的。特殊地，就阶段0而言（这即是L_4所肯定的“最先的阶段”），由于这是最先的阶段，就不可能有任何集合在此之先已经得到了构造，因此，这一公理所肯定的就是不包含任何元素的集合，也即空集的存在性。另外，如果将这一公理应用于L_6所肯定的阶段ω，则就立即获得了策墨罗系统中的无穷公理。

类似地，如果分别令“$\phi x \leftrightarrow (x = z \vee x = w)$”
和 $\phi x \leftrightarrow (\exists w)(x \in w \& w \in z)$”以及“$\phi x \leftrightarrow (w)(w \in x \rightarrow w \in z)$”，我们就有：

$$(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow ((x = z \vee x = w) \& (\exists t)(tEs \& xFt)));$$

$$(s)(\exists y)(x)(x \in y) \leftrightarrow ((\exists w)(x \in w \& w \in z) \& (\exists t)(tEs \& xFt)));$$

$$(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow ((w)(w \in x \rightarrow w \in z) \& (\exists t)(tEs \& xFt)))$$

显然，由这三个公式又可分别推出策墨罗系统中的对偶公理、并集公理和幂集公理。

另外，由规范公理及公理L_7和L_8我们又可推出策墨罗系统中的分出公理；而如果由归纳公理出发的话（再加上公理L_7和L_8），则不仅可以得出前述的基础公理，而且可以推出如下的更为一般的基础公理（模式）：

$$(\exists x)\phi x \rightarrow (\exists x)(\phi x \& (y)(y \in x \rightarrow \sim \phi y))$$

（后一公理所断言的是，如果一个谓词适用于某一集合，那就一定存在这样的“最小集合”：这一谓词适用于这一集合但却不适于它

的任何一个元素。正因为此，这一公理〔模式〕有时就被称为集合论的"最小原则"。）

这样，我们就由阶段理论推出了策墨罗系统中的所有公理。

尽管由阶段理论可以推出策墨罗系统，但是，这一理论却不足以推出替换公理和选择公理。当然，在此可以尝试用在阶段理论中引进新的更强的公理的方法去解决问题；但是，在布勒斯看来，这些规定并不属于集合的迭代观念。（尽管他也认为阶段理论只是对于这一观念的部分的表述①，从而就存在有作出新的发展的可能性。）

由于认为阶段理论是迭代观念（部分地）的精确表述，因此，布勒斯最终就得出了这样的结论：上述工作已经表明了策墨罗系统的合理性。如他所说："集合论悖论的最终和令人满意的解决不可能表现为这样一种理论，其中通过对公理的人为限制阻止了悖论的导出，而这些限制的提出则又仅仅是为了排除悖论。所有其它的（集合）理论都是依靠这种人为的设计得以生存的，而唯有ZF系统（及其扩展和子系统）不仅是（明显地）相容的，而且还具有独立的发展动力。这就是说，它具有一定的'直观背景'，对此可以用一种素朴的、非形式的方式加以描述，而且，即使在素朴集合论是相容的情况下，这种思想也会得到提出和进一步的发展。"«The Iterative Conception of Set»，载 «Philosophy of Mathematics,Selected R-eadings»，1983年版，第 490页。）

将布勒斯与王浩的工作加以比较，容易看出两者的区别不仅在于研究的方法，而且也表现在具体的结论上。显然，这也就更

---

① 因为，从根本上说，阶段理论并没有完全解决上面所已提及的两个问题：第一，由已给出的对象究竟可以构造出什么样的集合——如前所述，这是与构造幂集的运算，从而也就是与连续统假设直接相关的；第二，我们所采用的究竟是怎样一种"超穷的时间结构"。

清楚地表明了在直觉与理性认识之间所存在的既对立、又互相依赖的辩证关系。从而，我们就既应充分肯定对集合概念进行深入分析的重要意义(这也就如伯纳塞洛夫与普特南在《数学哲学论文集》“二版序言”中指出的，这是一个十分普遍的意见，即认为“迭代的描述为〔集合论的〕标准公理提供了一个直观的论据”〔同前，第30页。〕)；但同时又应避免过分地夸大这种研究的意义。这也就是说，我们不能把直觉看成是集合论合理性的最终依据，更不能认为集合的迭代观念最终地解决了整个数学的可靠性问题(事实上，上述的讨论表明，在迭代的观念中已经用到了序数〔超穷序数〕及函数的概念，因此，我们就不应再片面强调集合论的基础作用)。

综上所述，集合论的研究就是在直觉与理性认识的辩证运动中得到发展和深化的，这事实上也就是整个数学发展的必由之路。

2.3 柏拉图主义与形式主义的争论

除去集合概念的分析以外，数学哲学家们还以集合理论为具体对象从事了数学哲学基本问题的分析。正如前面已指出的，这种研究之所以得到人们的普遍重视是有其历史原因的，然而，相对于先前的研究特别是基础研究时代的有关工作，它的性质又已发生了重要的变化。下面我们将首先对现代数学哲学中关于集合理论分析的性质作出明确的说明，其次将围绕连续统问题对柏拉图主义与形式主义的争论作一介绍。除去对于集合理论深入发展的直接的指导意义外，这种争论也可以看成实在论与非实在论在数学本体论问题上的基本对立在集合论中的具体表现。

1．对于“大集合论基础”的观点的反对

如所知，集合理论在逻辑主义的基础研究中曾占有十分重要的地位：由于认为全部数学都可以以集合理论为基础得到建立，因此，在逻辑主义者看来，如果能够清楚地说明集合理论的“逻辑性质”，整个数学的逻辑性质也就得到了证明。然而，与逻辑主义的愿望相反，深入的分析表明集合理论并不能被完全纳入逻辑的范畴，从而，逻辑主义的基础研究就未能实现原先的目标。①就集合论的哲学分析而言，上述的历史发展显然也就表明了我们不应过份地夸大这种工作的意义。一般地说，一些数学哲学家则更为明确地对所谓的“大集合论基础”的观点提出了批评。

所谓“大集合论基础”，具体地说，是指这样的观点：“数学即是能够用证明的逻辑规则从集合论的ZF系统得到发展的一门学科”；从而，我们也就可以通过集合理论的分析去把握整个数学的本质。就数学哲学的现代发展而言，“大集合论基础”的观点已经是为人们所抛弃的了。例如，麦克兰就曾从十分一般的角度对此进行了批判。

麦克兰指出：“大集合论基础是对数学的错误片面的观点”。因为，“首先，它没有适当地描述以集合论为出发点去构造哪些有关的数学结构。从集合论出发推演可得到非常多的如此的结构，但事实上只有少数结构获得重要的地位……‘大基础’没有提供任何方式去解释这些概念的选择。”事实是，按照麦克兰的观点，这种选择是由外部的因素及其它一些与基础的考虑不相同的因素（如概念的深度、广度）所决定的。“其次，集合论基本上与大多数的数学实践无关……事实上集合论根本不是所有数学的基础，而只是数学的一门极度专门化的分支。”此外，大集合论基础还有着其它更技术性的缺点。（《数学模型》，同前，第52—53页。）从而，在

① 可参见《西方数学哲学》，第二章。

麦克兰看来，“大集合论基础”并没有正确地反映数学的本质。

除去对“大集合论基础”的批评以外，一些数学哲学家还曾从其它的角度对集合论的研究进行了分析。例如，在一篇题为《自然数不可能是什么》的论文中，伯纳塞洛夫就曾围绕“自然数究竟是什么”的问题对此进行了分析。

伯纳塞洛夫首先指出，自然数理论可以以集合论为基础得到建立：我们可以由集合理论出发明确地给出“1”、“自然数”、“后继”等概念及加法和乘法的定义，并可证明算术的各个法则可以由此而得到推导。但是，伯纳塞洛夫紧接着又指出，这种“集合论的解释”并不能有效地解决“自然数究竟是什么”的问题。因为，由集合理论出发去开展自然数理论可以借助两种不同的方式得以实现：我们或者可以把自然数定义为以下的序列：

$\{\Lambda\},\{\Lambda,\{\Lambda\}\},\{\Lambda,\{\Lambda\},\{\Lambda,\{\Lambda\}\}\},\cdots\cdots$；

也可以把自然数定义为序列：

$\{\Lambda\},\{\{\Lambda\}\},\{\{\{\Lambda\}\}\},\cdots\cdots$。

而且，就自然数理论的建立来说，这两种方式可以说是等效的。例如，在两者之中都可建立“大小”的关系，且可证明这种关系与通常所说的自然数的大小关系是相一致的；在两者之中也都可以建立“基数”的概念，并可证明一个集合有K个元素当且仅当在这些元素与所有小于或等于K的自然数(序数)之间可以建立一一对应的关系。然而，这又毕竟是两种不同的定义方式，因此，如果联系集合的概念进行分析的话，也就有一些不相一致的结果。例如，按照第一种解释，对于任意的两个自然数x和y来说，x大于y当且仅当y是x的一个元素，而这对于第二种解释显然是不对的；类似地，在第一种理论中可以证明自然数n恰有n个元素，而在第二种理论中所有的自然数都只有一个元素。从而，我们也就不可能利用集合论对“什么是自然数”的问题作出令人满意的解答。

依据上面的分析，伯纳塞洛夫最终引出了这样的结论：“自然

数不可能是集合”。(《(«What numbers Could not be»,载«Philosophy of Mathematics, Selected Readings», 1983年版，第290页。)显然，这也就更为清楚地表明了以集合论为工具去从事一般数学哲学问题分析的局限性。

综上所述，我们就不应过份地夸大集合论哲学分析的意义。然而，作为问题的另一方面，我们又应清楚地看到这种研究的意义。除所已提及的关于集合概念分析的认识论和方法论的意义外，这里还应强调这样一个事实，就是集合理论由于其特殊性质事实上成了数学哲学中各种对立观点斗争的一个焦点。这就如同莫斯托夫斯基在对自1930至1964年间数理逻辑和数学基础的研究进行总结时所指出的："集合论的哲学意义是显然的：与数学有关的基本认识论问题在集合论问题上找到最好的例证。……(对不大抽象的部分，问题不那么尖锐，因为我们懂得怎样把实际生活和科学所需要的东西形成数学理论。)"(《数学基础研究三十年》,第156页。)特殊地，60年代关于连续统假设独立性的证明就直接导致了现代数学哲学中柏拉图主义与形式主义争论的新的高潮。从而，总的来说，尽管关于集合论的哲学思考不能被认为是数学哲学的核心内容，但这仍然是现代数学哲学研究的一个重要组成部分。

2. 柏拉图主义与形式主义围绕连续统问题的争论

(1) 数学中的柏拉图主义通常是指这样一种观点，即认为数学对象是一种不依赖于思维的独立存在，从而，柏拉图主义就首先是一种本体论；其次，由于数学对象作为一种普遍概念("共相")显然不可能是一种经验的存在，因此，柏拉图主义者往往又突出地强调了直觉在数学的认识活动中的作用，即认为数学的认识可以唯一地建立在直觉(与证明)之上，这样，柏拉图主义也就是一种认识论。例如，伯纳塞洛夫与普特南就曾对柏拉图主义作了如下的描述：按照柏拉图主义的观点，"数学是由这样的命题所组成的，它们论及的是一个由熟悉的数学对象(诸如集合、数、函数与

空间等)所组成的独立的实在,数学发现即是对于这一独立存在的实在的真理的揭示,这种发现是通过由公理出发的演绎得出的,而我们则是借助于一种与感性经验(这只能给我们以关于经验世界的知识)相异的特殊的直觉能力认识到这些公理的真理性的。”(«Philosophy of Mathematics, Selected Readings», 前言,1983年版,第30页。)

柏拉图主义在数学家中有着十分广泛的影响。例如,古德曼就曾写道,柏拉图主义“对我来说似乎是关于纯粹数学家在做些什么这个问题的一个美好的、令人满意的说明。确实,我感到大部分当代数学家,即使他们现在未被清楚有力的表达所迷惑,也将接受这种观念的变种。”(《数学是客观的科学》,同前,第58页。)另外,作为形式主义的主要代表人物之一,柯亨也曾明确地承认:“我觉得避免一切迂回曲折的说法并承认集合是一个现存的实在,这是一个我不得不加以抵制的巨大的审美上的诱惑。”(«Comments on the Foundations of Set Theory», 载 «Axiomatic Set Theory» ed. D. S. Sott.)

柏拉图主义之所以具有广泛的影响是有其深刻的认识论根源的。任何稍有数学知识的人都一定会有这样的体会,就是我们在数学中所从事的是一种客观的研究。这也就是说,我们不能随心所欲地去创造某个“数学规律”,而只能按照数学对象的“本来面貌”去对此进行研究。例如,我们既不能随意地把 7 说成 4 和 5 的和,也不能毫无根据地去断言哥德巴赫猜想的真假。进而,这种关于数学客观性的素朴信念常常就导致了对于独立存在的数学对象的确认。这就如同弗雷格所指出的:“如果我们相信数学的客观性,那就没有任何理由反对我们借助于数学对象来进行思维,也没有理由反对关于数学对象的这样一幅图景:它们是早已存在着的,并等待着人们去发现。”(转引自M. Dummett, «Wittgenstein's Philosophy of Mathematics»,载«Philosophy of Mathematics, Selected

Readings», 1964年版，第493页。) 另外，柏拉图主义者对于直觉的强调在一定意义上则可看成应用类比的结果：如所知，一般的科学知识常常被认为建立在感性经验之上（这正是这些科学被称为“经验科学”的原因）；尽管数学对象并非经验的存在，从而数学知识就不可能直接建立在感性经验之上，但是，在此似乎可以引进“直觉”的概念，并认为数学知识即是建立在这种直觉之上的。例如，被认为是“柏拉图主义在当代最杰出的代表”的哥德尔就曾写道："尽管它们与感性经验相距甚远，但对于集合论的对象来说，我们仍然具有某种像感觉一样的东西……我认为，没有理由不赋予这种感性知觉即数学直觉以导致建立理论物理的感性知觉以同样的信任。" («What is Cantor's Continuum Problem?», 载 «Philosophy of Mathematics, Selected Readings», 1983年版，第 483-484页.) 当然，这种关于直觉的理论又由于众多数学家关于直觉的言论而进一步得到了加强。

(2) 如果把柏拉图主义看成一般哲学中实在论在数学中的反映，那么，现代数学哲学中的形式主义观念就可看成极端的唯名论在数学中的表现。按照这种观念，数学对象只是毫无意义的符号，数学家们所从事的则是按照明确给出的法则对符号（或符号序列）实行机械的组合和变形。从而，在形式主义者看来，从事数学研究也就如同下棋：数学的对象与棋子一样是不具有任何真实意义的；另外，按照指定的法则去对此实行变形则就如同按照确定的法则去移动棋子，……。

与柏拉图主义的观念一样，形式主义在现代数学哲学中的出现也是有其必然性的。随着数学的发展，特别是数学的现代发展，越来越多的、越来越远离自然界的，似乎是从人们的脑子中源源不断涌现出来的概念，进入了数学，它们并逐渐取代了那些“直接概念化”的对象而在数学中占据了主导地位，从而，数学的实际发展也就必然地促使人们去考虑这样的问题：我们应当怎样认识数

学研究的意义？又应当怎样去看待数学对象的实在性问题？对此，一个十分自然的立场是：我们应当努力把新的、不具有明显直观意义的数学对象（从更广泛的意义说，就是把新的数学理论）与已知的、具有明显直观意义的数学对象（数学理论）联系起来，这样，就像复数的几何解释、非欧几何的欧氏几何模型等一样，新的数学对象（理论）的客观意义就可通过所说的联系获得间接的解释。但是，深入的研究却表明了这种化归主义的努力在整体上是行不通的；又由于某些数学概念，特别是（实）无穷的概念被认为是不具有任何真实意义的，因此，一些人最终就采取了更为极端的立场，即完全切断了数学对象与客观实在的联系，而把"整个数学都看成仅仅是一种运算，一种没有也不可能给出解释的形式系统。这样，数学家们所谈及的就只是无意义的符号以及按照给定的形式法则去操作的公式，而不是数、函数或无穷集合了。"(R. Carnap: «Empiricism, Semantics and Ontology», 载 «Philosophy of Mathematics, Selected Readings», 1964年版，第233页。)

（3）一般哲学中实在论与唯名论的斗争由来已久，由于数学对象也是一种共相，更由于现代数学中充满了并不具有明显直观意义的对象，因此，作为上述斗争在数学中的具体表现，在数学哲学中也就有柏拉图主义与形式主义的斗争。这就如同奎因所指出的："古典数学（奎因是在与'直觉主义数学'相对立的意义上使用这一名词的，也即是指通常意义下的数学——注）充满了关于抽象对象本体论的承诺，所以中世纪关于共相的争论在现代数学哲学中又重新爆发出来。"(«On what there is»，载 «Philosophy of Mathematics, Selected Readings»，1964年版，第192页。）值得注意的是，这种斗争在60年代更由于连续统假设独立性的证明（及其它一些独立性结果）形成了新的高潮。显然，这一事实本身也就清楚地表明了数学哲学与实际的数学研究之间的密切关系。

具体地说，所谓的连续统问题可以笼统地表达为："（欧氏空间

中的)直线上究竟有多少个点?”或“实数系(连续统)在数量上究竟有多大?”这一问题在集合论的研究中占有特别重要的地位。因为,集合论的创建者康托曾用两种不同的方式构造出了(无穷)基数的无穷序列:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots\cdots; \quad ①$$

$$\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \cdots\cdots。 \quad ②$$

由于实数集是自然数集(其基数即为$\aleph_0$)的幂集,其基数(记为 C)即为$2^{\aleph}$,而连续统问题则可更为精确地表述成“C 等同于序列①中的哪一个数?”,从而,这就直接涉及到了两类基数的比较问题。

1874年,康托提出了如下的假设:

$$2^{\aleph} = \aleph_1$$

这就是著名的连续统假设。如果把这一假设加以推广,则就有广义的连续统假设:

$$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}。$$

康托在其一生中曾竭尽全力试图证明连续统假设,但始终未能获得成功。在康托以后,许多数学家也曾积极从事了连续统问题的研究,希尔伯特在1900年更把这一问题列为自己的23个数学问题中的第一个。1938年,哥德尔首先在这一方向上获得了第一个重要的结果:他用构造内模型的方法证明了连续统假设相对于现行的集合论公理系统的相容性。这就是说,如果 ZF 系统是相容的,那么,加上连续统假设所得出的新系统也是相容的。1963年,柯亨又通过引进力迫法证明了连续统假设的否命题相对于现行的集合论公理系统的相容性。从而,总的来说,连续统假设相

对于现行的集合论公理系统就是不可判定的，也即是独立的。

连续统假设相对独立性的证明在数学家中引起相当大的震动，因为，即如平行公理的相对独立性表明了可以建立多种互不相容的几何理论，连续统假设的独立性似乎也表明了可以发展几种互不相容的集合理论；进而，又正如非欧几何的建立导致了数学观的巨大变革，上述的发展也就直接促进了关于集合论的哲学思考，而其焦点即是如何对柏拉图主义与形式主义这两种互相对立的观点进行裁决。

柏拉图主义与形式主义在集合论问题上的对立所主要涉及的即是集合理论是否具有客观意义(更准确地说，客观真理性)的问题。形式主义者对此采取了完全否定的态度。例如，柯亨写道："正像关于欧几里得第五公设的真理性问题由于非欧几何相容性的证明而变成无意义的一样，在证明了连续统假设相对于集合论公理的不可判定性以后，关于它的真理性问题就丧失了意义"；"集合论的全部概念都是无意义的。"(«Comments On the Foundations of Set Theory», 同前。)与此相反，一些采取柏拉图主义的数学家则认为应当坚持集合理论的客观意义。例如，哥德尔就曾写道："如果承认前面所描述的集合理论中原始项的意义是正确的话，那么，必然的结论就是，集合论的概念和定理描述了某种完全确定的存在，在其中康托的猜测或者为真、或者为假。"(«What is Cantor's Continuum Problem?»,同前,第476页。)从而，在持有这种观点的人看来，连续统假设独立性的证明就只是表明了现行的公理系统并没有包含对于相应实在的完全的描述，而又只要建立起充分发展了的集合理论，连续统假设在其中就一定是可以判定的了。值得指出的是，哥德尔的上述论述是在1947年，也即是在柯亨关于连续

统假设独立性的证明以前作出的。①从而，在柯亨的工作以后有不少人仍然坚持这样的立场就不足为奇了。例如，在1965年的一次讨论会上，贝尔纳斯就曾明确指出，柯亨关于连续统假设独立性的结果是关于集合论的公理系统，而不是关于集合论本身的。这就是说，柯亨所解决的只是在怎样、怎样的形式系统中能否把那个表示连续统假设的公式推导出来的问题，而没有解决集合论本身的问题。贝尔纳斯认为，后一问题是可以解决的，只是由于我们目前的知识具有很大的局限性，所以还未能解决，而随着知识的积累，这一问题是可以解决的。

最后，应当指出，柏拉图主义与形式主义的上述对立并不是一种纯粹的哲学争论，而是对于实际的数学研究有着直接的指导意义。具体地说，就公理集合论的进一步发展而言，柏拉图主义者就突出地强调了这种认识活动对于直觉的依赖性，即认为我

① 另外，应当指出，尽管哥德尔有时被称为"当代最杰出的柏拉图主义者"，他的思想并不能被完全纳入柏拉图主义的范畴。例如，与数学对象的客观实在性相比，哥德尔更为强调了数学知识对于直觉的依赖性。他写道："数学直觉的对象的客观存在性对于现在的讨论来说并不是决定性的。单凭以下的心理学的事实，即存在这样一种直觉，它对于集合理论中公理的产生及进一步的扩展是足够清楚的，就足以赋予像康托的连续统假设那样的命题的真和假的问题以确定的意义了。"（同上，第484页。）另外，在哥德尔看来，与其把数学直觉设想成一种获得关于相应对象的知识的直接能力，毋宁说是数学直觉创造了数学对象。他写道："数学直觉未必要被设想成一种获得相应对象的直接知识的能力，毋宁说，与物理经验的情况一样，是我们以一些直接给出的东西为基础构造出了所说对象的概念，只是所说的直接给出的东西在此并非是，或者并非主要是感性知觉。"（同上，第484页。）最后，哥德尔又突出强调了直觉的"客观性"。他写道："这决不意味着，由于它们不能与某些东西对于我们感官的作用相联系，这第二类的素材就像康德所断言的那样是一种纯主观的东西，毋宁说，它们也是表明客观实在的一个方面的。但是，与感性知觉不同，它们在我们之中的出现可能是由于我们自身与实在之间的另一类关系。"（同上），一般地说，哥德尔自称为"客观主义者"——按照王浩的解释，这即是指"把数学看成是一门描述了事物的客观状况的科学"。（《From Mathematics to Philosophy》，第10页。）

们不能任意地去建立各种“可能的”集合理论；与此相反，形式主义者则往往更为突出地强调了数学思维的“自由性”，这就如同柯亨所说：“不应当在我们的思想中完全抹去对困扰我们的问题的正确评价，就连续统问题而言，这种倾向就可能——虽然不一定——导致依据人们如何估计连续统的势，而把集合论分裂成种种分支。”(«Comments on the Foundations of Set Theory»，同前。)

(4) 由于柏拉图主义与形式主义的上述争论是与集合论的现代研究直接相联系的，因此，我们就不能单纯依靠哲学的分析解决这一分歧；但是，作为问题的另一方面，我们又应看到，无论集合论的研究取得了什么样的成果，具体的数学研究也总不能取代对于有关思想的哲学分析。另外，又如前面所已指出的，柏拉图主义与形式主义围绕连续统假设展开的争论正是数学哲学基本问题(特别是数学对象的本体论问题)上的主要对立在集合论中的具体表现，从而，尽管典型问题的分析有助于一般研究的深入，但后者毕竟又不能为前者所完全取代。

在此应当指出的是，尽管形式主义与柏拉图主义在数学本体论问题上的立场是互相对立的，但两者又都具有严重的缺陷和理论困难。

首先，柏拉图主义在理论上显然是不彻底的，因为，这一理论并没有能对数学对象究竟是一种什么样的存在作出明确的解答。也正因为此，一些信奉柏拉图主义的数学家最终就倒向了唯心主义或宗教神学。例如，素朴集合论的创建者康托就曾明确地断言数学对象的客观实在性，但是，在对这种实在性作出解释时，最终却不得不求助于宗教神学。在1895年致法国数学家埃尔米特(C. Hermite)的一封信中，康托提出，数学对象的实在性并不存在于真实世界，而是存在于上帝的无穷智慧之中：数学对象的内在真实性即逻辑相容性保证了这种对象是“可能的”，而上帝的绝对无限的本质则保证了这种“可能的对象”在上帝思维中的永恒存在。

(可参见J. Dauben: «Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite», Harvard Univer. Press, 1979年,第228–232页。)另外,还应提及的是,柏拉图主义在认识论上也存在有严重的理论困难。一般地说,对于先验论的反对事实上也就是现代数学哲学中一般所谓的实在论观点与柏拉图主义的一个基本分歧所在(可参见第三章)。

其次,由于完全否认了数学的客观意义,因此,对于形式主义者来说,一个突出的困难就在于无法合理地解释数学理论在客观世界中的可应用性。对此甚至形式主义者自身也是认识到了的。如鲁滨逊就曾明确地承认:"这是一个事实,就是在一种我们尚未理解的方式下,那种在形式主义者看来是不可解释的数学和元数学产生了能用于实际思想和经验的结果。"(«Formalism 64»,同前,第241页。)另外,形式主义者也无从解释"数学家们何以在公理及理论的选择上表现出高度的一致性"。例如,柯亨就曾明确承认,他无法说明"为什么这些公理(指现行的集合论公理——注)是如此成功,并值得特别注意。"(«Comments on the Foundations of Set Theory», 同前。)

综上所述,尽管柏拉图主义与形式主义是两种互相对立的数学哲学理论,两者在理论上又都具有严重的困难和缺陷。从而,这也就清楚地表明了建立新的数学哲学理论的必要性(见第4章)。

第 3 章 经验的和拟经验的数学观

就数学哲学的现代研究而言，除去柏拉图主义与形式主义在数学本体论问题上的直接对立以外，在数学的认识论问题上则有先验论与经验论的对立。由于数学的特殊性质，先验论的观点在数学中由来已久，并有着广泛的影响；然而，现代数学哲学研究的一个重要特征，就是经验主义已经成为一个重要的思潮。例如，除一些个别的论述外，更有不少数学哲学家系统地从事了发展经验主义数学观的工作；另外，也有一些学者积极地对数学中的先验论进行了批判。(对此可参见 H. Putnam：«Mathematics, Matter and Method», Cambridge Univer.Press, 1975年；H. Lehman: «Introduction to the Philosophy of Mathematics», Basil Blackwell, 1979年；I. Lakatos: «Mathematics, Science and Epistemology», ed. J. Worrall and G. Currie, Cambridge Univer. Press 1978年；P. Kitcher: «The Nature of Mathematical Knowledge», Oxford Univer. Press, 1984年.)

就现代的经验主义思潮而言，首先应当明确的是，这一思潮的最主要特征是对于先验论的反对。也就是说，如果把现代数学哲学中的经验主义看成一种统一的理论的话，那么，它

主要地就是一种认识论，而且，这种认识理论是与先验论的认识理论直接相对立的。

其次，尽管对先验论的反对可以看成现代经验主义思潮的最主要特征；但是，就某些较为深入的研究而言，其所涉及的论题则已超出了认识论的范围，并包含了关于数学真理性问题的全面分析。事实上，由下面的讨论即可得知，先验论之所以在数学中有很大的影响，一个重要的原因就在于数学命题常常被认为是一种必然的绝对真理；而也正因为此，现代经验主义对数学真理“先验性”的反对往往就是与关于数学认识活动“易谬性”的分析直接相联系的：由于认为数学并不具有先天的必然真理性，因此，在经验主义者看来，数学的真理性最终就依赖于“经验的检验”，也即在实践活动中的成功性。另外，还应提及的是，在一些数学哲学家那里，关于数学经验性的断言更是与关于数学本体论问题的分析直接相联系的，从而，他们所提供的事实上就是一种完整的数学哲学理论。例如，普特南所提倡的经验实在论就是这样的典型例子。

第三，由于对先验论的反对可以看成是现代经验主义的最主要特征，因此，这一思潮在一定意义上即可认为是以穆勒为代表的传统经验主义在现代数学哲学中的“复兴”。但是，在这两者之间又存在着重要的区别。具体地说，传统的经验主义主要是以个别的数学命题为对象进行分析的。例如，按照穆勒的观点，数学中的大部分命题都是所谓的“经验的一般化”，即都建立在对于经验事实的直接归纳之上。与此相反，现代的经验主义则认为应当以整个理论为对象来进行分析。例如，莱曼就曾指出，数学命题并非穆勒所说的那种归纳命题，而是一种“受经验支持的理论命题”——按照莱曼的解释，一个命题被称为“受经验支持的”，如果它与别的命题一起，蕴涵了可观察的命题，而且，这种所观察的命题已经得到了经验的证实。不难看出，经验主义的上述变化是

与数学自身的发展直接相联系的(可参见第四章)。另外,也就是由于数学的高度发展,特别是由于现代数学表现出了极大的“独立性”,一些经验主义者在强调数学的“经验性”的同时,对数学的“拟经验性”也作了充分的肯定。

最后,应当指出,不同的数学哲学家对数学的经验性和拟经验性可能有着不同的理解。例如,按照一般的理解,所谓的“数学的拟经验性”即是指数学的真理性不仅依赖于经验的检验,而且也依赖数学的实践活动的检验;然而,拉卡托斯却依据波普尔的证伪主义科学哲学理论发展起了一种独特的拟经验数学观:按照这种观念,数学命题并不具有任何先天的绝对真理性,而且在本质上都只是大胆的猜想——对此只能进行证伪,而根本不可能有严格意义上的证实。

为了对现代的经验主义思潮作出全面的介绍和分析,下面将首先对这一思潮的主要特征作出分析;然后,将分别介绍普特南的经验主义数学观及拉卡托斯的拟经验数学观;最后,在前面论述的基础上,我们又将对现代数学哲学中经验主义思潮的实际背景及一般意义作出进一步的分析。

3.1 对数学先验论的反对

数学中对于先验论的反对有着十分重要的认识论意义。这是因为,先验论的观点不仅在数学中由来已久,并有着广泛的影响,而且数学历来被看成先验论的最坚固的堡垒。上述现象的出现当然并非是历史的偶然,而是有其深刻的认识论根源的。首先,由于数学知识曾长期被认为是必然真理,这种必然性显然又不可能建立在感性经验之上,因此,哲学家们在数学的认识论问题上往往

就采取了先验论的立场。从古希腊柏拉图的"先天回忆说"到近代康德的"先天综合判断"都可以看作这样的例子。其次，公理化方法在数学中的普遍应用又为数学的先验论提供了进一步的"论据"：由于数学中的公理被认为是"自明"的真理，这种真理性又可通过演绎逻辑的"保真"渠道扩展到整个系统，因此，在一些学者看来，这也就"证明"了数学真理的先验性，即数学的认识可以唯一地依赖于直觉或概念分析得到建立，而无须依赖于感性经验或实践。

正因为先验论在数学中有着深远而广泛的影响，数学中的经验主义者往往即以反对先验论作为自己的首要任务。就批判的方式而言，对此可以区分出"直接的论证"与"间接的论证"。例如，关于"必然真理未必是先验的"论述① 就可看成一种间接的批判，因为其中所涉及的主要是"先验性"与"必然性"两者之间的关系，而并非关于数学真理先验性的断言。另外，就批判的性质而言，则又可以区分为"历史的论证"与"逻辑(理论)的论证"。例如，关于各个数学分支发展历史的实际考察显然就属于前者的范围。由于间接的论证事实上已经超出了数学认识论的范围，历史实例的考察显然又不具有普遍的意义，因此，就数学先验论的批判而言，主要的问题就在于如何对此作出直接的、理论的批判。

下面即以基切尔的《数学知识的性质》为例对这种批判性工作作一简要的介绍。

1。关于先验论及数学先验论的一般分析

基切尔首先指出，关于知识先验性的断言所涉及的并非只是知识本身的性质，而且也必然涉及到了一定的认识(心理)过程：正是通过这样的过程，人们建立起了自己获得某种知识的信念。

一般地说，在此可以提出如下的"等值式"：

---

① 对此例如可参见克里普克(S. Kripke)，《命名与必然性》，上海译文出版社，1988年。

X具有知识p，当且仅当，p且X具有信念p，而且，这一信念又是由某一足以对此提供保证的过程所产生的。

进而，就先验的知识而言，则又可以提出如下的“等值式”：

X具有先验的知识p，当且仅当，p且X具有信念p，而且，这一信念又是由满足以下条件的过程所产生的：

无论就何种环境而言，只要在这一背景下X可能具有知识p，这时就有：①某些相同类型的过程可以使X产生关于p的信念；②如果所说的相同类型的过程使X产生了关于p的信念，这一过程就足以为此提供保证。（参见«The Nature of Mathematatal Knowledge»，第17、24页。）

将上面两个等值式加以对照，容易发现，后者与前者相比，其特殊性主要在于对相应的认识过程加上了如下的特殊条件：

在任何允许X具有知识p的环境下，这一过程或相同类型的过程都能产生相应的信念p，并足以为此提供保证。

基切尔指出，事实上，上述条件就是这样一种素朴观念的反映，即先验的知识并不依赖于任何特殊的经验，也即是一种绝对地独立于任何经验的知识。

其次，基切尔指出，数学的先验论主要建立在这样一种信念之上，即认为数学的知识并不依赖于任何经验，而可以唯一地借助于公理化方法得到建立。显然，这种信念也就相当于以下的断言：

存在这样的命题集A及推理规则集R，它们具有性质：①A中的每一命题都是先验的知识；②R中的每一条规则都具有保持先验性的性质；③对于数学中的每一命题都可建立这样的命题序列，其中的每一成分或者属于A或者是对排列在先的命题应用R中的规则的结果，而序列中的最后一个命题就是所说的数学命题。

由于上述的条件③所涉及的只是先验论能否适用于全部数学的问题，因此，就先验论的批判而言，重点就在于条件①和条件

②；又由于前述的分析已经清楚地表明了先验性的条件，因此，在基切尔看来，我们就可联系相应的认识（心理）过程来对数学的先验论进行分析和批判。

2．对于数学先验论的批判

（1）就证明的认识论作用而言，基切尔对数学的先验论提出了如下的批判：

在证明过于复杂和冗长的情况下，追随这一证明（这是一个心理过程）并不足以保证关于相应结论的信念。

事实上，这是一个公认的事实，就是在证明过于复杂和冗长的情况下，一个数学家虽然已经获得了某一结论的证明，但却始终存在着这样的忧虑：在所说的证明中可能存在未曾发现的错误。从而，证明的完成这一心理过程就不足以保证关于相应结论的信念。

当然，上述的怀疑情绪是一种心理现象。但是，基切尔指出，第一，这种怀疑情绪并不是一种不正常或不必要的心理状态，而是有其合理性的。因为，我们很清楚地知道，自己是会犯错误的。例如，过度的紧张必然会导致注意力的分散；我们有时会犯计算的错误；等等。因此，在通过一个冗长的证明而最终获得某一结论时，产生以下的想法就完全是合理的，即在证明中可能包含了某种隐藏的错误。第二，心理状态并不能改变命题的真理性，但是，上述怀疑情绪的存在及其合理性却清楚地表明了所说的证明并不足以保证相应结论的先验性。因为，由前面关于知识先验性的分析我们已经知道，其必要条件之一就是在任何环境条件下相应的过程都足以保证关于所说命题的信念。事实上，正如休谟早已指出的，数学家对于自己结论的信念常常依赖于环境的因素，如朋友们的支持，特别是学术界的赞许等——在基切尔看来，这也就清楚地表明了这样一点：在相反的环境条件下，即在不那么"友好"的环境中，单纯的证明是不足以保证关于相应结论的信念的。

最后，基切尔还对这样一种意见进行了批驳，即认为上述的怀疑情绪是由于证明的不完善而造成的。基切尔指出，证明的严格化即形式化，只会使证明变得更加冗长，从而也就只会进一步增强所说的不确定感，而不可能消除这种情绪。

综上所述，在基切尔看来，数学证明是否具有保持先验性的特性就是大可怀疑的。

（2）除证明认识作用的分析外，基切尔又对所谓的数学公理的先验性进行了批驳。就数学先验论的批判而言，后者与前者相比是更为重要的。因为，即使承认演绎推理具有保持先验性的性质，数学的先验论仍然依赖于关于公理先验性的论断，从而，只要我们能够证明数学公理的非先验性，数学先验论就丧失了最终的依据。

由于关于公理先验性的断言可以以不同的形式得到表现，因此，在此就必须针对各种可能的理论进行分析和批判。具体地说，基切尔首先对柏拉图主义的“直觉理论”进行了批判。基切尔指出，柏拉图主义在公理的真理性问题上通常采取先验论的立场是有其一定必然性的：由于认为数学对象是一种不依赖于思维的独立存在，因此，在柏拉图主义者看来，在数学对象与认识主体之间就存在着某种和物理（经验）对象与认识主体之间相类似的关系；然而，又由于数学对象并非通常的物理存在，数学的认识就不可能建立在感性经验之上，因此，柏拉图主义者最终就往往以所谓的数学直觉作为数学认识活动的依据，即认为数学的认识可以唯一地依赖直觉（和演绎逻辑）得到建立。但是，基切尔指出，柏拉图主义的直觉理论事实上是不足以证明公理的先验性的。因为，第一，上述的分析已经表明，这种关于数学直觉的思想在很大程度上是应用类比方法的结果。由于柏拉图主义者始终未能从认识论的角度对直觉的问题作出进一步的明确说明（这也就是伯纳塞洛夫所谓的标准观点在认识论问题上的困难所在），因此，柏拉图主义的直

觉理论充其量也就只能说是一种“可能的假说(解释)”，而不能被看成是一种已经得到了证实的理论。第二,由数学家的实践看,直觉在数学的认识活动中的确具有十分重要的作用；但是，直觉的易谬性(不可靠性)同样是一个公认的事实（而且，这也可以看成上述类比的一个合理推论。因为，感性经验显然是易谬的)。正因为此，直觉就不能为相应的数学知识提供可靠的保证——就现在的论题而言，这也就表明了这样的事实：我们完全可以设想出这样的“不友好”环境，在其中直觉并不足以保证关于相应数学命题(公理)的信念。从而，依据前述关于知识先验性的分析，公理的先验性就不可能建立在直觉之上。

其次,基切尔又对所谓的概念论的先验论进行了批判。所谓概念论的先验论主要是指这样一种观点,即认为数学命题(特别是数学公理）所涉及的只是概念之间的联系，从而其真理性就可唯一地建立在概念分析之上，而这也就证明了数学命题的先验性。与奎因关于分析真理的分析相类似(参见3.2节),基切尔也认为数学中的一部分命题(特别是公理)的确可以看成“定义下的真理”，如果其中所涉及的概念的意义是由相应的定义（隐定义或显定义——前者是就公理而言，后者是就定理而言）所确定的。一般地说，基切尔指出,这是一个事实,就是语言的训练可以使人们获得这样的能力，借助于此人们即可获得一定的知识。例如，在熟悉了现代代数学的语言以后，人们即就获得了如下的知识:“任何群都包含有一个单位元素”等；又如在了解了正切函数的定义以后$\left(tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$，人们自然也就可以由“$\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}=1$”引出新的知识“$tg45^\circ=1$”。但是，基切尔强调指出，这种关于概念意义的分析也不足以保证相应知识的先验性。具体地说,基切尔认为,对于一个数学理论人们可以从三种不同的角度对其可靠性提出一定的怀疑：①直接的挑战，即指对于理论中某些结论的直接(经验的)

否定；②理论的挑战，这是指提出另一种理论，并证明这种理论与原来的理论相比是更为合理的；③社会的挑战，这是指来自学术界或权威人士的指责，即认为理论的建立过程中包含有一定的错误。由于认为知识的先验性包含了这样的条件：在任何可能的环境中，相应的过程（或相同类型的过程）都足以保证有关的信念，因此，在基切尔看来，只要我们能够证明上述任何一种挑战的存在性和有效性，先验论的观点就遭到了驳斥。就概念论的先验论而言，基切尔认为，直接的挑战是不可能的。因为，在任何情况下，我们都可以通过概念的适当修正（限制）去排除任何可能的反例（例如，一种常见的说法就是："我们对于所说的概念有着不同的理解"）；但是，在此却可提出理论的挑战和社会的挑战：由于科学研究具有明确的目的性，因此，我们就不能任意地去创造和使用科学语言，而必须考虑其合理性的问题，又由于关于语言不合理性的分析势必会导致对于相应结论的怀疑，因此，在基切尔看来，某些可能情况的存在——在这些情况下，相应的定义（一般地说，就是某些概念的用法）将被认为是"不合理的"——就表明了语言的因素并不足以保证相应知识的先验性。例如，理论的不相容性就是这样的例子。另外，所定义对象的不确定性及其与习惯用法的不一致性也可能导致同样的结论，因为，这显然不利于认识的深化和发展，并可能导致误解和混乱。一般地说，基切尔指出："语言实践对于关于数学命题的信念的保证力可能由于这样的经验遭到破坏，如果这种经验表明了所涉及概念的应用的合理性是值得怀疑的。"这也就是说，如果经验使我们有理由认为我们对于一些概念的使用在某些方面是不合理的，这时，语言的使用就无法再保证对于相应数学命题的信念，而这也就证明了这些知识的非先验性。(«The Nature of Mathematical Knowledge» 第 85–87页。)

综上所述，基切尔认为数学先验论是站不住脚的，而这也就更为清楚地表明了系统地发展经验主义数学观的必要性。

3.2 普特南的经验实在论

普特南(H.Putnam)是当代美国著名的科学哲学家和逻辑学家。他早年求学于洛杉矶的加州大学，并曾先后任教于普林斯顿大学、麻省理工学院及哈佛大学。经验的实在论是普特南在科学哲学研究中所采取的基本立场，对此普特南本人在1974年出版的论文集《数学、物质和方法》的序言中曾作了这样的说明："①实在论，这不仅是指物质对象而言，而且也包括像物理量和场那样的'共相'，以及数学的必然性或可能性(或者等价地说，数学对象)；② 反对存在有任何绝对的先验真理的观点；③ 同时也反对关于'事实'命题都是并永远是'经验的'，也即从属于实验和观察的检验的思想；④数学并不是先验的科学，可以从历史和方法论的角度对数学的经验和拟经验的方面作清楚的说明。"(«Mathematics, Matter and Method», 第 vii页.) 由此可见，数学哲学在普特南的科学哲学研究中占有十分重要的地位，并事实上构成了其一般科学哲学思想的一个重要组成部分。正因为此，我们也就可以把他在数学哲学研究中所采取的立场称为"经验的实在论"。显然，这不仅清楚地表明了普特南的数学哲学理论与其科学哲学理论之间的高度统一，而且也集中地表明了这一立场的两个基本成分：实在论和经验主义。

1. 对于数学真理客观性的直接肯定

数学哲学中的实在论通常是指这样一种观点，它把数学对象看成是一种不依赖于人类思维的独立存在。由于柏拉图主义者在数学的本体论问题上采取实在论的立场，因此，实在论有时就被

等同于柏拉图主义。然而，由以下的介绍可以看出，普特南所主张的"经验实在论"与柏拉图主义及一般意义下的实在论都有着重要的区别。

在《什么是数学真理？》一文中，普特南曾对自己的实在论立场作了较为系统的论述。他首先引用了杜墨特(M.Dummett)关于实在论的一个简单而又十分精致的表述："实在论者（相对于某一给定的理论或论述而言)认为：① 这一理论或论述中的语句或者为真，或者为假；② 使它们为真或为假的是某种外在的东西——这也就是说，既不是(一般地说)我们的真实的或潜在的感觉，也不是我们的心智构造或语言，等等。"(«Mathematics, Matter and Method»,第69-70页。)显然，如果采取了这样的立场，所说的实在论事实上就只是肯定了数学的客观性，而并没有对数学对象的实在性作出任何断言。这也就如同普特南所说："实在论的问题……是数学的客观性的问题，而不是数学对象的存在性问题。"(同上，第70页。)由此可见，在普特南所主张的实在论与通常所说的实在论及柏拉图主义之间就有着重要的区别。

当然，正如第二章中关于柏拉图主义的讨论所已指出的，由承认数学的客观性到承认数学对象的(客观)存在性可以说是十分自然的一步。但是，在这两者之间毕竟又存在着重要的区别。普特南是清楚地认识到这种区别的，他并由此而发展起了自己的独特的"经验实在论"——就一般科学哲学而言，这是与他所谓的"形而上学的实在论"相对立的，就数学哲学而言，则是与柏拉图主义直接相对立的。例如，普特南就曾明确地指出："在数学哲学中我们可以是一个实在论者而不必'接受'柏拉图主义的认识论……我们也无须'接受'柏拉图主义的本体论。"(同上，第72页。)

那么，我们究竟应当怎样看待数学的客观性呢？什么又是数学研究的根本意义呢？由上面的分析可以知道，这事实上就涉及到了普特南经验实在论的核心内容。

为了更清楚地对普特南的经验实在论进行说明，在此可以通过与逻辑经验主义的数学真理观进行对照来进行分析。如所知，在本世纪50年代以前，逻辑经验主义在西方哲学界中曾长期占据主导的地位，而其基本理论之一即是关于两种命题——综合命题和分析命题——的区分。具体地说，按照逻辑经验主义的理论，命题可以按照其是否具有客观内容区分为分析命题和综合命题：前者不包含任何事实内容，后者则包含有一定的事实内容。逻辑经验主义的上述观点在历史上可以追溯到休谟。就其现代发展而言，则与逻辑主义的基础研究及维特根斯坦关于逻辑真理性的分析有着直接的联系：按照逻辑主义的观点，数学可以化归为逻辑；而维特根斯坦则认为逻辑真理是所谓的"重言式"，也即不包含任何事实的内容。从而，如果把这两种观点结合起来，我们似乎也就可以立即引出这样的结论：数学真理是不包含任何事实内容的，也即是所谓的分析真理。

由于逻辑主义把数学化归为逻辑的努力未能取得成功，维特根斯坦关于逻辑真理性的分析又具有明显的缺陷，因此，逻辑经验主义者后来一般不再强调由数学向逻辑的化归。但是，他们却仍然坚持了数学真理(及逻辑真理)是分析命题的观点，因为，只有这样，他们才能克服由于数学真理和逻辑真理所造成的严重的"理论困难"。这也就如同艾耶尔(A. Ayer)所指出的，按照经验主义的观点，"没有一个具有事实内容的命题能够是必然的或确定的"，然而，"数学和逻辑真理在任何人看来都是必然的和确定的"，从而，如果经验主义者不能对此作出令人满意的解释的话，他们"就不得不让路给唯理论"。(《语言、真理与逻辑》，上海译文出版社，1981年，第78—79页。)

作为数学与逻辑真理的具体分析，逻辑经验主义者突出强调了数学与逻辑命题的"不可证伪性"。例如，艾耶尔写道："假如看起来是欧几里得几何学的三角形，在度量时发现三个角的度数加

起来不是180度，我们不说我们已经遇到了一个例子，证明欧几里得几何学三内角之和是180度这一数学命题是无效的。我们说我们的度量有错误，或者更加可能的是说，我们已经度量的不是欧几里得几何学的三角形……在任何情况下……我们总是用某种对事件的其它解释来保持数学命题的效准。”(同上，第82页。)在逻辑经验主义者看来，这种“不可证明性”也就证明了数学及逻辑命题的分析性。这就如同艾耶尔所说：“分析命题是完全没有事实内容的。并且，就因为这个理由，没有经验可以驳斥这些分析命题。”(同上，第86页。)这样，在逻辑经验主义者看来，上述的关于数学和逻辑真理的必然性与经验主义基本立场的“矛盾”也就得到了解决。

逻辑经验主义者并曾从语言的角度对数学与逻辑的真理性进行了分析。他们认为，分析真理只是关于我们以何种方式使用词语的记录。这就如同卡尔纳普所说：“如果一个语句的真理性仅仅取决于语言因素，而与语言与外界的关系及外界的事情无关，那么这就是所说的分析真理。”

如前所述，逻辑经验主义在西方哲学界中曾长期占据主导的地位。但是，从50年代起，这一理论遭到了激烈的批评，而批判的锋芒所直接指向的正是关于分析命题与综合命题的区分等基本“信条”。从历史上看，美国哲学家、逻辑学家奎因首先对逻辑经验主义进行了有力的批判。在1951年发表的著名论文《经验论的两个教条》中，奎因写道：“现代经验论大部分是受两个教条制约的。其一是相信在分析的或以意义为根据而不依赖于事实的真理与综合的或以事实为根据的真理之间有根本的区别。另一个教条是还原论：相信每一个有意义的陈述都等值于某种以指称直接经验的名词为基础的逻辑构造。我将要论证：这两个教条都是没有根据的。”(《经验论的两个教条》，载《从逻辑的观点看》，上海译文出版社，1987年，第19页。)

继承了分析哲学的传统，奎因对于逻辑经验主义“两个教条”

的批判主要是围绕我们能否对分析命题与综合命题作出明确的区分这样一个问题展开的。但是，从根本上说，奎因的论据则是关于科学整体论的思想，他并由此而引出了“数学与逻辑命题是可以证伪的”结论。奎因指出，就科学理论的检验可言，我们不应就各个孤立的命题去进行考察，而应把全部科学看成一个整体。奎因这样写道：“我认为我们关于外在世界的陈述不是个别地、而是仅仅作为一个整体来面对感觉经验的法庭的。”这就是说，全部科学是这样一个“知识或信念的整体，从地理和历史的最偶然事件到原子物理学乃至纯数学和逻辑的最深刻的规律，它们组成了一个人造的大网络。”（同前，第38—40页。）正因为全部科学是一个整体，因此，在奎因看来，经验的冲击对科学所造成的就是一种整体性的后果，即总体内部的重新调整：对于各个命题真值的重新分配；进而，绝对意义上的证实与证伪也就都是不存在的。因为，“在任何情况下任何陈述都可以认为是真的，如果我们在系统的其它部分作出足够剧烈的调整的话，即使一个很靠近外围的陈述面对着顽强不屈的经验，也可以借口发生幻觉或者修改被称为逻辑规律的那一类的某些陈述而被认为是真的。反之，由于同样原因，没有任何陈述是免受修改的。”（同上，第40—41页）。

显然，按照上述的分析，逻辑经验主义关于分析命题与综合命题的区分就是没有根据的了。恰恰相反，按照奎因的观点，在数学（逻辑）与一般科学命题之间并不存在任何质的区别，而只是具有某种程度上的差异：后者由于处于科学网络的边缘与经验有着较为直接的联系，前者则因处于中央与经验只有间接的联系。然而，这种联系的间接性却并不能证明数学（逻辑）命题的不可证伪性。

综上所述，奎因的科学整体论就是对于逻辑经验主义真理观的严重挑战。但是，必须明确的是，在数学真理的客观性问题上，奎因最终所采取的立场却又是与逻辑经验主义十分接近的。具体

地说，由于奎因最终采取了实用主义的立场，即认为全部科学都只是一种“有用的虚构”——“就认识论的立足点而言，物理对象和诸神只是程度上、而非种类上的不同……作为数学内容的抽象物……在认识论上说，这些是同物理对象与诸神处在同一地位的神话，既不更好些，也不更坏些”(同前，第42页)——因此，在奎因看来，我们所能断言的就只是科学(包括数学)的“实用性”，而不是“客观的真理性”。

就科学整体论的思想而言，普特南与奎因的立场是完全相同的。但是，与奎因不同的是，普特南又突出地强调了科学（包括数学)的客观真理性，而这事实上也就是经验实在论（无论就一般科学或是就数学而言)的核心所在。例如，普特南指出，经验科学的实在论建立在如下的两个论据之上：第一，反面的论据。这是指各种反实在论的哲学理论，如化归主义和操作主义的理论等，都没有能取得成功。第二，正面的论据。这是指唯有实在论能为科学(的成功)提供合理的解释。这也就是说，唯有依据科学的描述性质及其与描述对象的关系，以下的现象才能得到合理的解释：科学词项的指称性，科学理论的近似真理性，相同的词项即使出现在不同的理论中也可能指称同一事物，等等。另外，就数学的实在论而言，普特南指出，上述的论据(特别是正面的论据)同样也适用于数学的情况；此外，我们还可提出以下的两个论据：第一，数学的经验。这是指数学的高度发展，它在解决问题上所取得的极大成功及自身的无矛盾性等。在普特南看来，这些即已证明了数学的真理性。他写道：“如果不存在这样一种关于大部分数学都是真理的解释，如果我们所作的仅仅是随意地去写出一些无意义的符号(其中甚至包括了尝试和错误)，我们的理论怎么可能是无矛盾的呢？它又怎么可能如此地富有成果呢？”(«Mathematics Matter and Method»，第73页。)第二，物理的经验，由于物理和数学是如此紧密地联系在一起的，因此，在普特南看来，对物理学

客观真理性的确认也就包含了对数学客观真理性的确认。例如，通过对万有引力定律的分析，普特南指出："如果一个人对物理世界采取实在论的立场，他就将断言万有引力定律是关于客体的客观性命题。但是，这一命题是什么呢？它所断言的是两个客体将如此地相互作用，以致与这些客体有关的两个数的比恰好等于与此相关的第三个数。从而，如果数及它们的相互联系（函数）都仅仅是虚构的话，这一命题又怎么可能具有任何客观内容呢？"（同上，第74页。）这也就是说，"数学和物理是如此紧密地联系在一起，以致不可能对物理理论采取实在论的立场，而对数学理论采取唯名论的立场。"（同上，第74页。）

综上所述，在普特南看来，"数学的经验表明在某种解释下数学是真理，物理的经验则表明这种解释是实在论的。"（同上，第74页。）从而，数学的客观真理性在普特南那里就得到了充分的肯定，而其基本论据则就是由奎因那里所继承的"科学整体论"的思想。

2．对象—模态的双重观点

仔细地阅读上面所引用的经验实在论的论述，不难发现普特南在此所论及的已不仅是科学真理的客观性，同时也直接肯定了科学理论的描述意义，特别是科学中专门词项的指称意义。由于数学与经验科学被认为是紧密地联系在一起的，因此，在此自然也就应当考虑这样的问题：数学中的专有名词是否也具有指称的意义？事实上，即使不去考虑数学与经验科学的联系，上述问题的提出也是不可避免的。因为，就数学真理性的深入分析而言，我们显然不能停留在对于数学真理客观性的一般肯定上，而应对数学命题与客观实在的联系作出进一步的分析。例如，我们应当怎样去理解数学中存在性命题的意义：如"n次代数方程至少有一个复数根"，"至少存在有三个大于17的质数"，等等。这样，我们也就必须进一步去从事数学本体论问题的直接研究。

由于大部分数学概念都可以借助集合的概念得到定义，因此，数学的本体论问题在很大程度上就可归结为如下的问题：我们应当怎样去看待集合的实在性？也正是出于这样的考虑，普特南就把那种直接肯定了数学对象存在性的观点称为"关于数学的集合-对象观点"（更为一般地说，这就是伯纳塞洛夫所谓的"标准观点"）。例如，普特南写道，关于数学的集合一对象观点，即是指"把数学看成对于由'数学对象'所组成的'世界'的描述——特殊地，数学就是对于集合之间关系的描述，而如果把'集合'改成'集合和数'也不会造成多大的区别。因为在今天，数可以被'等同于'集合这样一点看来已不被认为具有特殊的意义，而主要之点则是数学是对于'客体'的描述。"（同前，第47页。）

显然，普特南所说的"集合一对象观点"是与柏拉图主义的本体论基本一致的，因此，在普特南看来，简单地接受这种观点就是不能允许的，而必须发展起关于数学的不同的观点。具体地说，这就是所谓的"关于数学的模态一逻辑观点"。按照这种观点，数学并不具有自己的特殊对象，而只是借助于特定概念对普通事物的研究。这也就是说，"数学根本不具有自己所特有的对象。你可以就你所乐意讨论的任何对象——雨天、纸上的痕迹、图像、直线或球体——去证明定理……！数学家并没有作出任何存在性的断言，而只是表明什么是可能的，什么是不可能的。"（同上，第70页。）显然，按照这样的观点，数学在本质上就是模态的，而并非描述性的（这也就是普特南何以把这种观点称为"模态一逻辑观点"的原因）。例如，按照这一观点，自然数理论中的命题所表明的就是这样的事实，它们对于任意的ω序列（无论构成这种序列的是雨日、纸上的痕迹，或是别的什么东西）都是成立的；另外，关于"自然数是存在的"断言所表明的则是以下的事实：第一，ω序列是（数学地）可能的；第二，存在这样的必然真理，它们可以表述

为："如果α 是一个ω 序列，那么，……"。①

应当指出，上述的"模态一逻辑观点"在原则上并非一种全新的观点。例如，作为非欧几何建立的一个直接后果，在数学哲学中就曾出现过条件真理论的观点，即认为数学中所得出的只是一种条件式的命题：由什么样的前提出发，我们可以推出什么样的结论。显然，这种条件真理论的观点与这里所说的数学的模态一逻辑观点是十分接近的；然而，普特南的独到之处却在于他并没有片面地强调数学的模态一逻辑观点，而是把这一观点与前述的数学的集合一对象观点联系起来，并提出了所谓的"数学的对象一模态的双重性"。具体地说，由于认为这两种观点是可以互相解释（翻译）的，因此，在普特南看来，我们就不应片面地强调其中的任何一种观点，而应采取一种互补的立场，即可视场合的不同，或者采取对象的观点或者采取模态的观点来对另一种观点进行澄清和说明；另外，普特南认为，这也就彻底地解决了数学的本体论问题。因为，我们现在既可以自由地去谈及数学对象的存在性，而同时则又不必去考虑这究竟是一种什么样的存在。

3．关于数学对象实在性问题的具体分析

由于认为"对象一模态"的双重观点已经较为彻底地解决了数学的本体论问题，因此，在普特南看来，我们现在就可较为自由地去讨论究竟应在多大程度上承认数学对象实在性的问题。普特南在此所采取的并非是一种"绝对的实在论"的立场，即认为我们不应当任意地、不加限制地去承认各种数学对象的实在性，而应依据"对于科学的必要性"、简单性等原则对此作出具体的分析。

---

① 应当指出，第二章中已曾提及的帕森斯也积极从事了发展"数学的模态观点"的工作。例如，帕森斯提出，集合论应被看成这样的理论，它所论及的是什么样的结构是可能的，特别是，什么样的结构对于迭代的集合观来说是可能的。对此可参见《Mathematics in Philosophy》。

应当指出，普特南所采取的上述立场同样也可看成对于奎因有关思想的直接继承。具体地说，奎因早就明确地提出了这样的主张：在本体论问题上我们应当采取宽容和实验的精神。这也就是说，我们应对各种理论的本体论承诺进行具体分析和比较，并应努力实现可能的化归以减少理论的本体论承诺；另外，我们所接受的则应是"能够把毫无秩序的零星片断的原始经验加以组合和安排的最简单的概念结构。"[①]（可参见《从逻辑的观点看》，第16-18页。）特殊地，就数学的本体论问题而言，奎因并曾写道："让我们看看怎样或在何种程度上可以使自然科学脱离柏拉图主义的数学；但让我们也继续研究数学和探究它的柏拉图主义的基础。"（同上，第18页。）另外，在1940年出版的《数理逻辑》一书中，奎因则曾更加明确地指出，如果要对数学和自然科学真正地加以分析而不是干脆否定的话，那么，"我们除了承认那些抽象物（指集合或谓词一注）为我们的基本对象的一部分，是别无选择的"；但是，奎因又进一步指出，除去集合和谓词以外，其它的抽象物就都是"不需要的了"。

就最终所得出的具体结论而言，普特南与奎因是十分接近的：第一，通过"对于科学的必要性"的分析，普特南指出："对于科学，无论是形式科学或是物理科学来说，数学对象的量化是必不可少的，因此，我们就应接受这种量化，而这也就意味着接受所说的数学对象的存在性。"（«Philosophy of Logic»，载«Mathematics, Matter and Method»，第347页。）例如，通过对"有效性"概念表述问题的分析，普特南指出："目前，指称'集合'或一些同样是'非物理的'事物对逻辑科学来说是必不可少的。至少在今天，作为整个学科基础的逻辑'有效性'的概念还不能用纯粹唯名论的语言

① 此外，奎因还曾提出了所谓的"保守性原则"，即认为我们应尽可能地保存那些被认为是"主要的"或"显然的"原则。

完满地予以表达。"(同上,第333页。)另外，普特南又指出，对于物理科学来说，集合也是必不可少的。因为，为了对物理定律进行表述，物理量的'数化'是不可避免的，而为了使物理量的数化有意义，就必须引进函数和实数这样一些概念。从而，如果把唯名论的语言"当作唯一其应用在哲学上是有依据的语言加以接受的话，就不仅将使我们实际上放弃了全部数学，而且这种唯名论的限制对形式科学和经验科学也将造成同样的损害：不仅是数学，连物理学我们也必须放弃了。"(同上，第337页。)第二，普特南同时又突出强调了自己所倡导的实在论的"受限性"。在普特南看来，逻辑和数学的系统事实上构成了一个复杂的多层结构：底层是一阶逻辑系统，往上则是二阶、三阶逻辑系统等等。从而，关于实在论的限制也就是指我们究竟应当承认哪一层次上的数学系统。普特南指出："本文所叙述的'实在论'是有限制的。至少事物的集合、实数及由多种事物到实数的函数应作为物理科学和逻辑学在目前所必不可少的(或几乎必不可少的)支架的一个部分，也即作为我们目前所承认的存在物的一个部分而予以接受。但是，更高类型的集合或更大的基数(例如，大于连续统的基数)在今天则应抱着'如果……那么……'的精神予以研究。"(同上，第347页。)这就是说，目前我们应当也必须接受集合的实在性，但对更高层次上的数学理论则应继续采取宽容和实验的态度。由于科学具有无限的发展可能性，因此在普特南看来，我们也就不能排斥这样的可能性：到了科学发展的某一阶段，继续避免使用较高层次上的理论将带来很大的困难。普特南认为，这时我们就应接受所说的理论，也即接受相应数学对象的存在性。普特南写道："也许，有一天它们(指更高层次的数学理论——注)对物理定律的表述来说将成为必不可少的，就像今天的有理数一样，那时再怀疑它们的实在性就像今天的极端的唯名论一样是枉费心机的了。"(同上，第347页。)

最后，应当再次明确的是，尽管奎因也认为我们应当承认集

合的存在性，但他之所以采取这一立场主要是出于"实用主义"的考虑，即认为集合是一种"有用的虚构"；另外，由前面的介绍可以看出，普特南是明确承认数学真理的客观性的，因此，在两者之间就存在着重要的区别。

4．经验主义的认识论

普特南在本体论上的实在论立场是与在认识论上的经验主义立场直接相联系的，而且，就其思想根源而言，这种经验主义的认识论也是由上述关于数学与经验科学统一性的思想所决定的。普特南这样写道："数学知识是与经验知识相类似的——这就是说，数学的真理标准与物理学一样，也在于我们的思想在实际活动中的成功性，而且，数学知识并非绝对的，而是可以修正的。"（同前，第61页。）

显然，这种关于数学经验性的思想是与关于数学真理客观性的断言完全一致的，并事实上就是由后者所决定的。值得指出的是，由上述关于数学客观真理性的分析我们还可对数学的经验性作出进一步的分析。如前所述，普特南认为，数学的实在论有两个主要的论据，即物理的经验和数学的经验，由于前者即是指数学理论在经验世界中的成功应用，因此，这也就可以看成对数学真理（在严格意义上）的经验性的具体说明；另外，数学的经验则是指数学研究活动的成功性，而这就说明了数学真理的拟经验性。

普特南还曾从历史的角度对数学的经验性和拟经验性进行了说明。例如，普特南指出："微积分理论合理性的真正证明在于它的成功性——它在数学和物理科学中的成功性。"（可参见«What is Mathematical Truth?» «Mathematics, Matter and Method»，第 64~69页.）另外，普特南又指出，数学家们在自己的研究中也广泛应用了拟经验的方法。这就是说，数学家们在自己的研究中常常是由一定的假设出发去进行演绎，再通过结论与事实的比较对原先的假设进行检验——与一般科学的不同只是在于：数学中用于检验的"单称

命题”并非通常意义下的“观察报告”，而是数学中的“事实”，即其本身也是证明或计算的结果。例如，普特南写道：“策墨罗引进的选择公理就是完全自觉及更明显地应用拟经验的方法证明对数学公理化基础进行扩充的合理性的最新例子。”（同上，第66页。）一般地说，普特南则更认为，“我们在数学中始终在使用拟经验的、甚至经验的方法。”（同上，第64页。）从而，在普特南看来，我们也就应当直接肯定数学的经验性和拟经验性。

最后，普特南并曾以非欧几何的建立为例对数学的先验论进行了直接的批判。普特南指出，关于物理空间是欧氏空间的断言曾长期被认为是一个必然的（从而也就是先验的）真理；然而，非欧几何的建立及几何的实际发展却清楚地表明了欧氏几何作为物理空间理论始终是综合的，从而也就不具有任何必然的真理性。这样，由非欧几何的建立我们就应引出这样的结论：任何命题，无论它是如何的清楚和明晰，都不可能是自明的真理，也即不可能是先验的必然真理。

综上可见，普特南的数学哲学理论在很大程度上就可看成是把经验主义的理论由一般科学推广应用到了数学的领域，而其基本论据则是关于科学整体论的思想。这也就如普特南本人在其论文集的序言中所指出的，贯穿全书的是这样一个思想：“科学，包括数学在内，是一个统一的描述，这一描述并非是神话，而是真理的近似，它的某一部分在某些时候可能暂时地表现为‘先验的’，但是它的一切成分都从属于修改和改进。”又“在一种不那么严格及较为间接的意义上，大部分数学也是经验的”，“它同时依赖于经验及拟经验的论证。”（同前，第Xiii,77页。）①

3.3 拉卡托斯的拟经验数学观

拉卡托斯（I. Lakatos）原籍匈牙利，二次大战期间曾参加反

对纳粹德国的抵抗运动，后担任匈牙利教育部高级官员，1950年在清查运动中被捕并入狱三年，出狱后主要从事数学名著的翻译工作，1956年拉卡托斯逃往西方，后专门从事数学哲学及科学哲学的研究。拉卡托斯在数学哲学领域内的主要著作是《证明和反驳》及《无穷回归与数学基础》、《经验主义在现代数学哲学中的复兴?》等论文。在谈到拉卡托斯的数学哲学时，拉卡托斯的学生、《拉卡托斯论文集》的主编之一沃勒尔（J. Worrall）曾向笔者指出："拉卡托斯无疑受到了波普尔的极大影响。事实上，他在某些时候就把自己看成是把波普尔的证伪主义推广应用到了数学的领域。"②从而，为了清楚地对拉卡斯的数学哲学思想进行说明，就有必要首先对波普尔的科学哲学思想作一简要的介绍。

1．证伪主义的科学哲学理论

---

① 数学与物理的类比或关于全部科学统一性的思想在哥德尔、奎因和普特南的数学哲学研究中都占有十分重要的地位。对于他们的论证方式及主要结论可简单归结如下：

	论证方式	主要结论
哥德尔	类　比 （物理对象 ↑↓ 数学对象　感性经验 ↑↓ 数学直觉）	客观主义的数学观： ① 应当肯定数学真理的客观意义； ② 数学对象（与物理对象一样，都）是思维的产物； ③ 应当充分肯定直觉的认识论意义。
奎　因	科学整体论	实用主义的数学观： ① 应当接受数学对象的存在性； ② 数学对象（与物理对象一样，都）是"有用的虚构"； ③ 应当用实用主义的考虑代替真理性问题的分析。
普特南	{物理的经验 数学的经验（科学整体论）	经验实在论的数学观： ① 应当肯定数学真理的客观意义； ② 数学的"对象—模态"双重性； ③ 数学的经验性和拟经验性。

② 可参见附录一。

波普尔是现代科学哲学的主要代表人物之一。与奎因的工作相类似，波普尔科学哲学研究的实际出发点也是对于逻辑实证主义基本原则的直接批判。具体地说，这就是关于什么是科学或者说什么是科学与形而上学分界标准的新的思考。如前所述，鉴于数学与经验科学的"对立"，逻辑实证主义的经验论提出了分析命题与综合命题的区分，即认为数学(逻辑)命题是不包括事实内容的分析命题，其它科学的命题则是所谓的综合命题。另外，为了对科学与所谓的"形而上学"进行区分，并进而达到排除形而上学的目的，逻辑经验主义还提出了如下的"证实"原则：任何在认识上有意义的命题，除非是所谓的分析命题，都必须是经验上可证实的命题——由于认为形而上学既非分析命题，也不可能经验地得到证实，因此，在逻辑经验主义者看来，只须坚持上述的证实原则，形而上学就将作为无意义的东西得到彻底的排除。应当指出的是，奎因所提出的科学整体论不仅否定了逻辑经验主义关于分析命题与综合命题区分的原则(即奎因所谓的"经验主义的第一教条")，而且也是对于证实原则的直接挑战，因为，证实原则事实上假设了任一有意义的陈述(更准确地说，是综合命题)都等值于某种以指称直接经验的名词为基础的逻辑构造，也即假设了每一有意义的陈述都可以还原成关于直接经验的报告(这就是所谓的"经验主义的第二教条")。然而，正如前面所已指出的，奎因的科学整体论却正是对于每个命题可以孤立地接受经验检验的思想的直接否定；另外，就科学整体的实际组成而言，奎因并曾指出，这一大网络中也包含有形而上学的成分，从而，就如对于经验主义第一教条的否定一样，奎因事实上也取消了科学与形而上学的区分——奎因最终并引出了这样的结论：科学理论也是一种虚构，从而与形而上学就只有程度上的差异，并无本质的区别。与奎因一样，波普尔对逻辑经验主义的证实原则也采取了否定的态度，但是，波普尔同时又认为科学与形而上学的分界问题仍然是有意义的，

从而，在此所需要的就是以某种新的分界标准去取代逻辑经验主义的证实原则。

从历史的角度看，爱因斯坦相对论对于牛顿力学的取代构成了波普尔关于什么是科学与形而上学分界标准的思考的实际背景；另外，从逻辑的角度看，波普尔的理论则建立在科学命题的逻辑结构及归纳法则的深入分析上。具体地说，波普尔指出，科学命题都是普遍的结论(全称命题)，然而，由于观察或实验的对象都是具体的事物，能为经验所直接证实的就只是个别的断言(特称命题)，而不可能是普遍的结论；另外，由于归纳法所能告诉人们的只是过去的事实，而不能告知人们以未来，这也就不能被看成由个别的断言过渡到普遍结论的可靠方法。因此，总的来说，科学命题的经验证实就是不可能的。其次，尽管科学命题的经验证实是不可能的，但是，波普尔认为，上述关于科学命题逻辑结构的分析却又表明了这种命题是可以经验地证伪（否证)的。因为，任何反例的得出，即是对于相应的普遍结论的直接否定。波普尔并曾指出，这事实上也就是爱因斯坦的相对论取代牛顿力学在认识论上的根本意义所在。从而，在波普尔看来，我们在此就应以“经验的证伪原则”，而不是以(经验的)证实原则作为科学与形而上学的分界标准。这也就是说，只有能够为经验所证伪的陈述才是有意义的，从而是科学的；否则就是无意义的，即是所谓的形而上学。

犹如证实原则是逻辑经验主义最基本的原则一样，波普尔也以证伪原则为基础发展起了自己的证伪主义（或批判的理性主义)的认识论。波普尔并曾指出：“认识论的中心问题从来是现在仍然是知识增长的问题，而研究知识增长的最好方法是研究科学知识的增长。”(«The Logic of Scientific Discovery», Hutchinson of London, 1968年，第15页。)从而，波普尔所倡导的认识理论事实上就是(或者说，主要地是)一种科学哲学理论。鉴于本章的主题，对于

波普尔的证伪主义科学哲学理论，我们仅限于指出这样几点①：第一，科学知识的性质。由于认为科学命题只能被证伪而不可能得到证实，因此，在波普尔看来，科学知识就只是大胆的猜测。如他所说："科学……仅是由大胆的、思辨的猜测所组成的。"第二，科学发展的动力及科学方法论。由于认为任何科学理论都只是大胆的猜测，因此，在波普尔看来，科学发展的根本动力就是积极的批判精神。他写道："科学的方法就是批判的方法"，"批判……是任何理智发展的主要动力。"(参见«Objective Knowledge», Oxford, 1972年,第70页；«Conjectures and Refutatoins», Routledge and Kegan Paul,1965年,第316页。)波普尔并曾给出了关于科学发展的如下的著名模式：

$$P_1 \longrightarrow TT \longrightarrow EE \longrightarrow P_2$$

（问题）　（暂时性理论）　（错误消除）　（新的问题）

这就是说，科学的发展是由以下四个环节的无限循环所组成的：①科学始于问题；②科学家们针对问题提出大胆的猜测，即（暂时性）理论；③通过批判和检验消除理论中包含的错误，④提出新的问题。在波普尔看来，这也就清楚地表明了科学活动的基本性质即是"猜想与反驳"。

波普尔的科学哲学研究主要限于一般科学的范围；然而，随着证伪主义影响的不断扩大，人们自然会想到这样的问题：这种证伪主义是否也适用于数学？对此波普尔并未作出肯定的答覆，然而，这却正是拉卡托斯所希望解决的问题。

2. 数学是拟经验的

与普特南一样，拉卡托斯数学哲学研究的主要特点之一也是对于数学与经验科学同一性的充分肯定；然而，由于基本立场的

① 在下一章中，我们还将涉及波普尔的世界3理论。

不同，拉卡托斯所提倡的并非是经验的数学观，而是一种特殊的拟经验的数学观。如他所说："数学和科学都是拟经验的。"拉卡托斯并对所说的理论的拟经验性作了如下的说明："一个拟经验的理论——至多——是很好地确证了的，但总是猜测性的。"又，拟经验的科学方法论的"基本规则是寻找具有较高解释力量和'启发'力的大胆的、想象的假设。事实上，它提倡假设的多样化，以及通过严格的批评来对此进行筛选——拟经验的方法论是无拘束的、思辨性的"；"拟经验理论的发展始于问题及大胆的解决，然后是严格的检验和反驳。进步的媒介是大胆的思索、批评、对立理论之间的争论和问题转移。其注意力始终集中于模糊的边缘。它的口号则是增长和永恒的革命，而不是基础和永恒真理的积累。"(«Mathematics, Science and Epistemology, Philosophical Papers II»,第 35, 28, 29, 30 页.)由此可见，尽管就对于数学绝对真理性(先验性)的否定而言，拉卡托斯与普特南的立场是基本一致的，但是，拉卡托斯所说的数学的拟经验性却是指数学的绝对的猜测性(不可证实性)，从而就与通常所说的拟经验性有着重要的区别；另外，拉卡托斯的拟经验数学观在很大程度上又的确是把波普尔的证伪主义理论推广应用到了数学的领域。①

由于波普尔的研究主要限于一般科学的范围，因此，拉卡托斯就必须对证伪主义在数学中的应用作出独立的论证。对拉卡托斯的有关论著进行检查，可以看到这样几种论证：

第一，历史的实例。通过对历史实例的考察(例如，笛卡儿—欧拉猜想的历史发展，对此可参见第 6 章的讨论)，拉卡托斯指出："非形式的，拟经验的数学的增长并不是无可怀疑地建立起来的定理在数量上的增加，而是依靠思辨和批判、依靠证明和反驳

① 应当指出，拉卡托斯的数学哲学思想中也包含有一些不同于证伪主义的成分，这主要是对于数学启发法的肯定。对此可见 6·2节。

的逻辑不断地去改进猜想。”(«Proofs and Refutations» ,ed. J. Worrall & E. Zahar, Cambridge Univer. Press, 1976年, 第5页.)

第二，著名数学家的有关论述。例如，在《经验主义在现代数学哲学中的复兴?》一文中，拉卡托斯就曾以较大篇幅引用了一些著名数学家（更准确地说，是从事基础研究的数学家）关于数学经验性的论述。拉卡托斯认为，这些论述清楚地表明了数学中的经验主义(及归纳主义)比大多数人所想象的都要更为活跃和广泛。

就经验主义的一般论题而言，拉卡托斯的上述论证是有一定说服力的;但是,就拟经验数学观的主要结论——数学命题都是大胆的猜想，对此只能证伪而不可能证实——来说，这些论据又都不能被看成是决定性的。因为,第一,个别的实例显然并不具有普遍的意义。其次，正如拉卡托斯本人指出的，所谓的经验主义在现代数学哲学中的复兴包含有明显的归纳主义倾向，而这是与证伪主义的基本立场直接相抵触的。(正因为此，拉卡托斯在引用了著名数学家关于数学经验性的论述后，就立即提出了如下的问题:“但是,这种新的经验主义——归纳主义倾向的背景是什么?什么又是这种倾向的理论基础?”(«Mathematics,Science and Epistemology»,第28页.)事实上，按照拉卡托斯的观点，这种归纳主义的倾向只是数学家们在哲学上不成熟的一种表现，即是一种由于发展的停滞而造成的假象。)最后,特别重要的是,无论就历史的实例或是就数学家的有关论述而言，其所表明的都只是数学认识活动的易谬性及其对于经验(实践)的依赖性，而拉卡托斯所断言的却是数学在理论上的绝对的猜测性(不可证实性)，在这两者之间显然是存在有重要的质的区别的。综上所述，拉卡托斯就必须为自已的拟经验数学观提供更为有力的论据。

第三，拉卡托斯为拟经验数学观提供的主要论据事实上是关于欧几里得系统与拟经验系统的二分以及关于(数学的)欧几里得

规划不可能性的分析。具体地说，关于欧几里得系统与拟经验系统的二分建立在演绎系统真值传递方式的分析之上。拉卡托斯指出，在演绎系统中真值的传递方式只可能是如下的两种，即或者是“真”由系统的“顶部”(公理的并)经由有效论证的保真渠道自上而下地扩展到整个系统，或者是“假”由系统的“底部”(特殊的“基本命题”)经由演绎的渠道上传到系统的顶部。拉卡托斯把这两种系统分别称为“欧几里得系统”和“拟经验系统”。其次，拉卡托斯指出，数学基础的研究，无论就逻辑主义、直觉主义或希尔伯特的研究规划而言，其实质都是一种把全部数学重建为欧几里得系统的努力(也即都是所谓的“欧几里得规划”)。因为，所有这些学派的最终目标都是希望能把数学奠基于这样的一个基础之上：其中的公理都是关于平凡项的自明真理，这样，整个数学就被组织成了所谓的欧几里得系统，全部数学的真理性也就得到了证明。但是，拉卡托斯又强调指出，尽管罗素、希尔伯特等人作出了巨大的努力，原来意义上的欧几里得规划都没有能够得到实现（取而代之的是所谓的“弹性的欧几里得规划”，即人们不得不或者逐步地去扩大“自明真理”的范围，或者求助于归纳)。拉卡托斯认为，这种失败事实上就“证明”了(数学的)欧几里得规划的不可能性；而由这种不可能性与上面所说的欧几里得系统与拟经验系统的二分我们又可进而推出数学是拟经验的结论。例如，拉卡托斯写道：“基础研究出人预料地导致了数学的欧几里得式重建在整体上不可能的结论。从而，至少就最丰富的数学理论而言，它们与科学理论一样是拟经验的。”(同前，第30页。)

3．关于数学性质的进一步分析

由于系统的拟经验性决定了系统内真值的传递方式，即系统内的命题只能被断言为假，而不能被断言为真，因此，在拉卡托斯看来，由数学拟经验性的证明我们就可立即推出“所有的数学命题都是猜想”的结论，从而就把波普尔的证伪主义推广到了数学

的领域。但是，应当明确的是，拉卡托斯的上述论证事实上仍然包含有严重的缺陷和错误(对此我们将在下一章中予以分析)。另外，关于数学拟经验性的断论也不能被看成关于数学性质的彻底分析。特别是，我们决不能把这里所说的拟经验数学观等同于通常意义下的经验主义数学观① 。事实上，上面的分析已经清楚地表明，拉卡托斯所谓的"拟经验性"所涉及的仅仅是演绎系统中真值("真"或"假")的传递方式，而并未对注入其基本命题的真值的性质作出任何断言。这也就如同拉卡托斯本人所指出的："这一关于真值传递方式的区分相对于决定注入其基本命题的原始真值的特殊约定是完全独立的。例如，一个我所说意义上的拟经验理论，在通常意义上既可以是经验的，也可以是非经验的。"(同前，第29页。)

那么，我们究竟应当怎样看待数学的性质呢？特殊地，我们又能否将数学看成是一门经验科学，从而与其它科学就并无本质的区别呢？针对这一问题，拉卡托斯提出："如果数学和科学都是拟经验的，它们之间的根本区别——如果这种区别存在的话——就必然在于它们的'基本命题'或'潜在的证伪者'的性质。拟经验理论的'性质'是由注入其潜在的证伪者的真值的性质所决定的。"拉卡托斯并进一步指出："没有人会声称数学在下述意义上是经验的：它的潜在证伪者是特称的时空命题。"(同前，第35页。)从而，

① 由于拉卡托斯把自己的数学观称为"拟经验的数学观"，并在他自己的论文中大量引用了"经验主义—归纳主义"的论述，因此，就十分容易产生如下的错误，即把这里所说的"拟经验性"等同于通常所说的"经验性"(例如，在国内已发表的论文中就经常可以看到这样的错误)。另外，作为问题的另一方面，我们又应看到，由于拉卡托斯所说的"拟经验性"即是指理论的猜测性(可证伪性)，而且，拟经验的系统又是与所谓的欧几里得系统直接相对立的，因此，拉卡托斯的拟经验数学观就是对于先验论数学观的直接反对。也正因为此，尽管这种观点并不等同于通常意义下的经验主义数学观，但却仍然应当被看成属于现代数学哲学中的经验主义思潮。

尽管数学与一般科学都被认为是拟经验的，但是，在拉卡托斯看来，两者之间仍然存在着重要的区别。

由讨论的上下文可以看出，拉卡托斯在此所关注的主要是形式数学理论的性质。例如，正是为了对形式数学理论的性质作出进一步的说明，拉卡托斯又引进了“启发式证伪者”的概念：如果一个形式系统被看成某一非形式数学系统的形式化，那么，在其中的某一定理为所说的非形式系统中相应定理所否定的情况下，这一系统就可被认为受到了“驳斥”（否证），而这一非形式的定理则就称为“启发性证伪者”。显然，按照这样的分析，形式数学系统的性质问题就与相应的非形式数学系统的性质问题直接联系起来了。但是，应当指出的是，拉卡托斯最终却未能对形式数学理论的性质问题作出明确的解答，而只是列举了以下的可能性：“我们是否将经由非形式数学理论的转移而抵达经验理论，并由此而证明数学是间接地经验的，……？注入数学基本命题的真值的唯一源泉是构造？或是柏拉图主义的直觉？或是约定？”（同前，第40页。）拉卡托斯并写道，上述问题的解答几乎不可能是铁板一块的，“仔细的历史性和批判性的案例分析可能将会导致一个复杂的、混合性的解答。”（同上，第40页。）拉卡托斯的上述思想，特别是关于我们应当联系相应的非形式数学理论来考察形式数学理论的真理性问题的观点有着重要的启示意义。但是，这又毕竟不是关于数学性质问题的明确解答。因此，归根结蒂地说，拉卡托斯的拟经验数学观就不能说是一种彻底的数学哲学理论。

除去上述的不彻底性以外，即如前面所已提及的，在拉卡托斯为拟经验数学观所提供的论证中也存在有严重的缺陷和错误。拉卡托斯的数学哲学理论中存在有这些缺陷和错误应当说是不足为奇的，因为，即使是拉卡托斯本人对自己的数学哲学理论也是不满意的，并希望能对此作进一步的发展和改进。然而，由于拉卡托斯的不幸早逝，他始终未能实现在数学哲学领域作出新的发

展的愿望。

3.4 经验主义思潮的实际背景和普遍意义

依据上述关于普特南及拉卡托斯数学哲学思想的介绍，我们即可对经验主义思潮的实际背景及其普遍意义作出分析。

首先，从数学哲学本身的历史发展看，现代的经验主义思潮可以看成对于先前阶段的基础研究的一种“反动”。这一情况与数学史上由平行公理的研究而导致了非欧几何的建立是十分相似的：由于平行公理与欧氏几何中的其它公理相比似乎并不是那么“自明”的，因此，从欧几里得的时代开始，数学家们就一直企图对此进行证明。最初采用的是正面的方法，即希望能用别的公理对平行公理进行证明；后来又出现了反面的尝试，即设平行公理为假，希望能由此推出矛盾，从而就可依据排中律而断言平行公理为真。但是，尽管人们作出了巨大的努力，所有证明平行公理的尝试却都没有能获得成功。从而，长期的失败就促使了数学家们去进行新的思考：平行公理究竟能否借助于其它的公理得到证明？特殊地，我们又能否用相反的假设去取代原来的欧氏平行公理而发展出另一种合理的几何理论？显然，在这样的意义上，非欧几何的建立就可看成对于先前的证明平行公理的努力的一种“反动”。与此相类似，尽管逻辑主义者、直觉主义者及希尔伯特在数学基础研究中所采取的立场各不相同，他们的最终目标却又都在于希望能为数学奠定一个“永恒的、可靠的”基础，从而一劳永逸地解决数学的可靠性问题。然而，不管罗素、布劳维尔及希尔伯特等人作了怎样的努力，所有的基础研究规划都没有能获得成

功。从而，就如第1章中所已指出的，长期的失败必然促使人们去进行新的思考：数学是否需要基础？特殊地，由于逻辑主义等学派所采取的都可以说是一种“反经验的理性主义”立场——在他们看来，数学的可靠性问题只能依靠纯理性的思维，而不能依靠经验（实践）得到解决——因此，作为对于基础研究倾向的一种“反动”，经验主义在现代数学哲学中成为一个重要思潮就是十分自然的了。

在普特南与拉卡托斯的数学哲学研究中，对于基础研究的“反思”的确都占有十分重要的地位。例如，普特南在《没有基础的数学》中就曾明确指出：“我并不认为数学是含糊不清的；我也并不认为数学在其基础中有任何危机；事实上，我根本不相信数学具有或需要什么‘基础’。”（可参见1.1节.）另外，拉卡托斯则更把基础研究的失败当成了自己所提倡的拟经验数学观的直接论据：由于认为基础研究规划的失败已经表明（数学中的）欧几里得规划是不可能成功的，因此，在拉卡托斯看来，依据所说的关于欧几里得系统与拟经验系统的二分，我们就可直接引出“数学是拟经验的”结论。

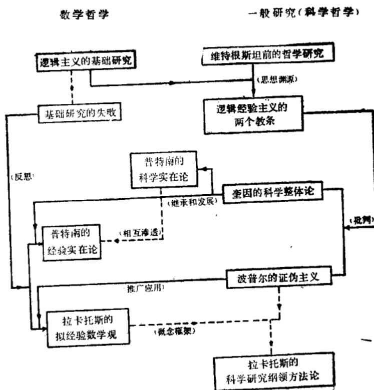
综上可见，现代数学哲学中经验主义思潮的出现就是有其内在必然性的。

其次，由普特南及拉卡托斯的数学哲学研究又可看出，除去上述的内在必然性以外，现代数学哲学中经验主义思潮的出现还有着来自外部的动力，这就是对于逻辑经验主义哲学思想的彻底批判。

具体地说，尽管普特南与拉卡托斯的数学哲学研究有着不同的思想基础——在普特南那里，主要是奎因的科学整体论；对拉卡托斯来说，则主要是波普尔的证伪主义理论——但是，无论就科学整体论，或是就证伪主义的科学哲学理论而言，又都是对于逻辑经验主义基本理论的直接批判；进而，尽管普特南与拉卡托

斯的数学哲学思想并不完全相同(特别是，虽然普特南及拉卡托斯都曾提及数学的拟经验性，但是，从真理性的角度说，两者却是在相对立的意义上强调了数学的拟经验性：普特南所谓的"数学的拟经验性"是指数学的真理性不仅取决于其在经验活动中的成功性，而且也取决它在〔纯〕数学研究活动中的成功性，从而，他所说的"经验性"及"拟经验性"就都是对于数学真理性的直接肯定；与此相反，拉卡托斯所谓的"拟经验性"则是指数学命题的绝对的猜测性、即不可证实性)，但是，这两者又都可以看成对于逻辑经验主义数学真理观(分析真理论)的一种"清算"。①

① 综上所述，对于现代数学哲学中经验主义思潮的有关发展的实际背景及其与一般科学哲学的联系可以总结如下：



最后，依据上面的分析，也就容易看出现代数学哲学中经验主义思潮的普遍意义：

（1） 由于经验主义思潮即是对于以基础研究为代表的（数学）理性主义（特别是先验论数学观）的“反动”，因此，就数学哲学的研究而言，现代经验主义思潮的出现就是一个重要的进步。事实上，即如第1章中所已指出的，这正是数学哲学的研究进入一个新的时期的重要标志之一。

（2） 由于数学历来被认为是先验论最坚固的堡垒，因此，对数学先验论的批判其意义就不仅仅限于数学哲学的范围，而是有着更为广泛的普遍意义。更为一般地说，由于现代数学哲学中的经验主义事实上已经超出了认识论的范围，并包含了对于数学真理性问题及本体论问题的全面分析，又由于这些问题是与一般哲学中的真理性问题及本体论问题密切相关的（或者说，前者是后者的重要组成部分），因此，这种数学哲学的研究也就为一般的哲学研究提供了新的启示和动力。应当指出的是，这种特殊和一般的关系，事实上也就是数学哲学研究的根本意义所在。这就如同普特南与伯纳塞洛夫在《数学哲学论文集》“二版前言”中所指出的：“在数学哲学与一般哲学中关于实在论的形而上学问题讨论之间无疑有着密切的联系。……正因为此，我们认为，那些对认识论的基本问题、真理和指称的理论、语言哲学及形而上学感兴趣的哲学家们就应更加注意数学的情况。……数学的世界并不是一个孤立的世界。除非我们对于数学在我们关于物理现象的解释中所起的作用有了更好的理解，对于物理世界的充分解释是不可能的，另外，又只有在这种关于知识、真理和实在的解释同样适用于纯粹数学的情况下，所说的解释才能被认为是令人满意的。”（«Philosophy of Mathematics, Selected Readings», 1983 年版，第37页。）

（3） 相对于一般哲学而言，数学哲学与一般科学哲学有着更为直接的联系。例如，正如前面所已指出的，普特南的数学哲学

理论（经验的实在论）即是其一般科学哲学理论（科学实在论）的一个重要组成部分；拉卡托斯的拟经验数学观则可看成波普尔的证伪主义科学哲学理论在数学中的推广应用。也正因为此，在数学哲学与一般科学哲学之间就存在相互促进的辩证关系。例如，除去波普尔的证伪主义以外，在第五章的讨论中我们还可看到库恩的科学哲学思想对于现代数学哲学研究的直接影响。另外，由拉卡托斯后期的科学哲学研究我们则可看到数学哲学对于一般科学哲学的积极作用：除去证伪主义的成分以外，在拉卡托斯的数学哲学理论中还包含有一些新的不同成分，特别是关于数学启发法的思想（参见第6章），而又正是这些超出波普尔哲学的成分为拉卡托斯后来发展科学研究纲领方法论这一新的科学哲学理论提供了必要的概念框架（对此可参见附录Ⅱ：从数学发现的逻辑到科学研究纲领方法论）。显然，就现在的论题而言，这也就更为清楚地表明了数学哲学研究（特殊地，经验主义思潮）所具有的普遍意义。

第 4 章　模式观的数学哲学理论

在这一章中我们将对数学哲学的基本问题作出独立的全面分析，并发展起一种新的数学哲学理论：模式观的数学哲学理论。这一理论的主要内容为：数学真理的层次理论，模式观的数学本体论及模式观的数学认识论。在最后一节中我们还将对模式观的数学哲学理论与其它理论作出比较，并以此为依据对所已提及的各种观点及其它问题作出分析和评论。

4.1　数学真理的层次理论

就数学真理性问题的研究而言，关键在于不能以某种单一的观点去看待所有的数学知识，而应从历史发展的角度对此作出具体的区分，并进而确定各种层次上的数学知识的特殊性质。一般地说，这里所倡导的数学真理的层次理论也就是从这样的角度去进行分析和综合的结果。

1. 数学知识的不同层次

数学知识按其历史发展的顺序，也即性质

的不同可以作出如下的区分：

（1）关于原始形态的数学知识与素朴的数学知识的区分。

所谓原始形态的数学知识在此是指一些并不很复杂的实际问题的解答。如，“首先采集第一棵树上的苹果，再采集第二棵树上的苹果，或首先采集第二棵树上的苹果，再采集第一棵树上的苹果，这两种作法所采得的苹果是否一样多？”“有两块不同形状的土地，一块呈方形，一块呈圆形，如方形的边长大致等于圆形的直径，试判定哪一块土地有较大的面积？”等等。另外，所谓素朴的数学知识在此则是指“$2+3=3+2$”、“等周长的平面图形中以圆面积最大”等这样一些命题或其汇集。

为了对所说的这两种知识进行“严格的”区分，我们可以引进如下的划分标准：原始形态的数学知识即是指这样的“数学知识”，它们的获得并不以建立严格的数学概念为必要前提；不然的话，则就称为（真正的）数学知识。特殊地，素朴的数学知识就属于后者的范畴。

（2）关于素朴的数学知识与理论的数学知识的区分。

素朴的数学知识即是指上面所已提及的个别数学命题的汇集；理论的数学知识则是指整体性的数学知识，其中各个命题的逻辑联系（或者等价地说，各个有关概念的内在联系）已经得到了明确的揭示，从而就不能被看成个别命题的简单组合。例如，公理化的数学理论即为理论的数学知识的典型例子。然而，应当明确的是，这种知识也可能以其它的形式得到表现。例如，从历史的角度看，自然数的概念系统最初就是以所谓的“生成法”、而并非公理化方法得到建立的。具体地说，我们以“1”作为第一个自然数（开始数），然后，通过反覆地实施“加一”的运算，就获得了如下的无穷序列：

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots n,\ n+1,\ \cdots\cdots。$$

为了方便讨论，我们再引入以下的概念：如果一个数学命题

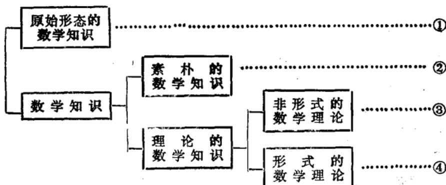
是作为某一理论的数学知识的组成成分被接受的（例如，这一命题是通过逻辑证明得到建立的），就称为理论的数学命题；不然的话，就称为素朴的数学命题。显然，利用所说的概念，素朴的数学知识就可“定义”为素朴数学命题的简单汇集。

就现代的数学研究而言，所谓的数学知识无疑是指理论的数学知识，而并非素朴的数学知识。但是，从理论的角度看，特别是考虑到数学的历史发展，素朴的数学知识显然又应被看成数学知识的一个部分。

（3）关于非形式的数学理论与形式的数学理论的区分。

所谓非形式的数学理论在此是指具有明显直观背景的数学理论，形式数学理论则是指不予以解释的数学理论。就公理化数学理论而言，前者就是指实质的公理系统，即所谓的“对象——公理——演绎”系统；后者则是指抽象的公理系统，也即所谓的“假设——演绎”系统。例如，欧几里得的《几何原本》所给出的就是非形式的几何理论；与此相反，希尔伯特在《几何基础》中所建立的则是形式的几何理论。

（4）最后，应当强调的是，我们是在递进的意义上作出上述的三个区分的，从而，从总体上说，对（泛指意义上的）数学知识就可区分出如下的四个不同层次。对此我们将分别称为原始水平、素朴水平、理论水平及（纯）形式水平上的数学知识。



对上述各个层次上的数学知识进行综合分析，容易看出，这里所作出的区分是与数学的历史发展直接相对应的。另外，就数学真理性问题的研究而言，重要的事实则是在于：数学哲学家们往往是以某种特定的数学知识为对象从事数学的哲学思考的。例如，正如第 3 章中所已提及的，传统的经验主义的主要代表人物穆勒提出，数学命题是所谓的“经验的一般化”，也即是建立在直接经验之上的归纳命题，显然，这正是以素朴的数学知识为直接对象进行思考的结果；其次，各种先验论的数学观（如柏拉图主义、分析真理论等）则是以由素朴的数学知识上升到理论的数学知识为必要前提的；最后，由非形式的数学理论向形式数学理论的过渡又显然为形式主义的数学观提供了直接的动力和必要的论据。

正因为所已提及的各种数学哲学理论都是以某一特定层次上的数学知识为对象进行思考的结果，它们就都具有一定的合理性；然而，由于所说的数学知识又只是全部数学知识的一个部分，因此，所有这些理论就都具有一定的局限性。进而，为了对数学的真理性问题作出正确的分析，我们就必须首先对各个层次上的数学知识的特殊性质作出分析，然后，再以此为依据去进行综合。下面我们就来具体地从事这一工作。

2。素朴数学知识的经验性

由于原始形态的数学知识并非真正的数学知识，因此，就数学真理性问题的具体分析而言，我们首先就应考虑素朴数学知识的性质。而这又可集中地表述为：素朴的数学命题能否看成建立在直接经验之上的归纳命题？

从形式上看，对于上述问题似乎可以作出肯定的答覆。例如，我们可以由“这只天鹅是白的”、“那只天鹅是白的”……通过归纳而得出“所有的天鹅都是白的”的结论；类似地，我们似乎也可以由“两个苹果加上三个苹果是五个苹果”、“两个人加上三个人是

五个人"……经由归纳而得出："2＋3＝5"。正如前面所已提及的，从历史的角度看，这事实上就是传统的经验主义数学观的一个主要论据。例如，穆勒就曾指出，通过眼的观察或手的触觉，我们可以认识到任何一定数目的对象，比如10个球，都可以分割和重新组合成各种其和为10的组合，如1个球和9个球的组合，2个球和8个球的组合，等等，从而，通过归纳，我们就得出了如下的一般命题：1＋9＝10，2＋8＝10，……。在穆勒看来，这也就表明了数学命题与其它的科学命题一样，都是"经验的一般化"，即是建立在直接经验之上的归纳命题。

上面的论述表明，如果停留在素朴水平上的话，传统的经验主义数学观是有一定合理性的；但是，应当强调的是，即使就素朴的数学知识而言，对于所说的"经验性"也必须作出如下的重要修正：第一，无论就数学知识或是就一般科学知识而言，其中都有一些命题应当被看成"定义下的真理"，而并非建立在直接经验之上的归纳命题。第二，上述的经验主义数学观是从历史的角度，或者说从认识发生的角度进行分析的结果；而如果从理论(逻辑)的角度，或者说从知识检验的角度进行考虑的话，对数学的真理性就必须作出不同的解释——这事实上也就是数学命题与其它科学命题的一个重要区别。

具体地说，这里首先涉及的是诸如"两个苹果加上三个苹果是五个苹果"这样的命题能否看成表明了直接的经验事实的问题。不难看出，为了获得所说的知识，人们必须首先建立"两个苹果"、"三个苹果"等这样一些概念。尽管这些概念与一般的数量"2"、"3"等相比是较为特殊的，但它们同样是抽象思维的产物，从而，上述知识的获得过程就包含了概念的应用，而这也就表明了所说的命题并非都是直接的经验事实，即其中至少有一部分应被看成是"定义下的真理"。

在由所谓的"经验事实"过渡到相应的数学命题时，上述的分

析显然仍然是有效的。例如，如果把“3”定义成“2与1的和”，那么，“2 + 1 = 3”显然就应被看成定义下的真理，而并非建立在直接经验之上的归纳命题。类似地，我们也可对数学以外的一般科学作出同样的分析。例如，为了获得以下的知识：“人是有理性的”、“人是会死的”等，我们就必须首先建立“人”、“理性”、“生物”等概念；而如果把“人”定义为“有理性的生物”，命题“人是有理性的”显然就应被看成定义下的真理。

应当指出，上述关于部分数学（科学）命题分析性的断言并不应被看成对于其客观意义的否定。事实上，如果停留于素朴水平的话，所说的概念必然是一种“直接观念化”的概念，即具有明显的直观意义，从而，相应的命题也就具有明确的客观意义。①但是，上述的分析同时又清楚地表明了这样一点：即使就素朴的数学知识而言，其“经验性”也不能被简单地等同于“归纳性”。

其次，在承认了部分命题的“分析性”以后，我们显然又应考虑这样的问题：这一论断的适用范围究竟有多大？或者说，我们是否应当把所有的（素朴的）数学命题（及科学命题）都看成是所说的“定义下的真理”？

就一般的科学知识而言（准确地说，是素朴水平上的科学知识——这是与理论的科学知识相对立的），“定义下的真理”的外延是相当狭窄的。因为，就大部分的科学命题来说，在所涉及的概念之间并无必然的联系。例如，按照通常的理解，“天鹅是白

① 以下的事实可以看成上述断言的一个有力论据：同一数量规律在不同的数系中可能具有完全不同的表述形式。例如，十进位制数系中的命题“2 + 1 = 3”与二进位制数系中的命题“10 + 1 = 11”所表明的就是同一个数量规律。正因为同一数量规律可以以不同的形式得到表现，因此，就所涉及的范围而言，关于命题“分析性”的断言所涉及的就只是它的最终的表述形式，而其真理性则又仍然取决于它是否正确地反映了客观事物的量性规律性。这事实上也就是我们为什么必须考虑“定义”合理性的根本原因。

的"就不能被看成"定义下的真理"，因为，在"天鹅"与"白"这两个概念之间并无必然的联系。也正因为此，观察、实验及归纳在科学的认识活动中就具有特别重要的作用。那么，对于数学知识来说，我们是否也可引出同样的结论呢？我们认为，如果停留在素朴水平上，也即从历史的角度(或者说，认识发生的角度)进行分析的话，上述结论对数学来说在一定程度上也是有效的。例如，一旦建立了"1"、"2"、"3"等概念，人们就可通过观察和归纳去建立除上述"定义下的真理"以外的新知识，如"2＋3＝5"，……。类似地，在建立了"三角形"等概念以后，我们也可以借助于观察和实验并通过归纳建立"三角形的内角和为180度"等知识。这事实上也就是几何学早期发展的实际情况。但是，应当强调的是，在所说的数学命题与经验命题之间又存在着以下的重要区别：第一，单纯凭借观察、实验和归纳在数学中是走不远的。因为，即使对于足够大的数来说，我们就已无法使相应的认识建立在直接的观察或实验之上，更不用说包含有无限的情况了。第二，更为重要的是，数学的研究早已超出了经验的水平。这也就是说，在现代的数学研究中，一个数学命题只有得到了理论的证明才能被认为是可接受的，而这种证明则又表明了数学命题所涉及的并非概念的偶然联系，而是它们的必然联系。从而，即使对于"2＋3＝5"、"三角形的内角和为180度"这样的命题来说，关于其归纳性的断言也只是从历史的角度进行分析的结果，而如果上升到理论高度的话，就必须对数学的真理性作出新的分析。

综上可见，对传统的经验主义数学观我们必须作出重要的修正和限制。但是，就素朴的数学知识而言，我们又应在下述的意义上去肯定这种知识的经验性，即这是对于客观世界量性规律性的直接刻画。

3. 非形式数学理论的经验性和拟经验性

前面已经指出，与个别(素朴)命题的简单汇集相比，理论的数学知识的主要特征在于对于各个命题逻辑联系（相应地，各个概念内在联系）的深刻揭示。这也就是说，系统的数学理论事实上代表了一个完整的概念体系。数学的研究由素朴的水平上升到理论的水平，在认识论上是具有重要意义的。这主要是：

第一，在系统的数学理论中，只有得到逻辑证明的数学命题才是可接受的，而这种逻辑证明显然又是以概念的内在联系为依据的，因此，如果把公理看成相应概念的隐定义的话，数学理论中的各个命题就都应当被看成“定义下的真理”。从而，尽管其中某些命题的得出(认识)很可能仍然建立在观察、实验与归纳之上，但是，从理论的角度看，它们又都应当被看成“定义下的真理”。

第二，尽管非形式数学理论具有明显的直观背景(而且，从历史的角度看，这种理论的建立往往就是对相应的素朴命题的简单汇集进行综合分析的结果)，但是，由于在理论的数学研究中，概念是通过明确的定义(隐定义或显定义)得到“构造”的，而且，在定理的推导过程中，我们又只能依靠所说的定义，而不能求助于直观，因此，从认识论的角度看，系统的数学理论相对于直观背景而言就获得了一定的独立性。这也就是说，理论的数学研究在形式上即是以“独立的”数学理论(概念框架、数学结构、模式)为直接研究对象的。

第三，正由于非形式的数学理论相对于客观实在具有一定的独立性，因此，在理论的层次上我们似乎就可自由地去谈及独立的数学对象的存在性，而数学命题则可被认为是关于相应数学对象的真理。但是，必须明确的是，这些数学对象并非不依赖于思维的独立存在，而正是借助于明确的定义逻辑地得到构造的，从而，数学对象所具有的就只是一种相对的独立性，对此必须与柏拉图主义的本体论明确地加以区分（对数学的本体论问题，我们将在下一节中作出进一步的分析）。

第四，犹如素朴数学命题的分析一样，我们也不能因断言（非形式的）理论数学命题的“分析性”而否认其所包含的客观意义。也正是在这样的意义上，我们即可提及非形式数学理论的经验性；但是，对于这里所说的“经验性”又必须赋予与素朴数学知识的经验性不同的解释。具体地说，①所谓非形式数学理论的经验性，主要是指理论的真理性取决于其在实际活动（社会实践）中的成功性；另外，从历史的角度看，非形式数学理论的建立又往往是对素朴的数学命题的简单汇集进行综合分析的结果，从而也就直接或间接地依赖于感性经验。②这里所说的经验性是一种整体性的概念，即是就整个理论，而不是就其中的个别命题进行分析的，因此，关于理论经验性的断言就不能被理解为是指理论中的每一命题都与客观实在有着直接的联系。③由于概念是抽象思维的产物，其建立的过程必然包含了“简单化（理想化）、粗糙化、僵化”，更由于理论的数学研究是以抽象的数学理论为直接对象的（即在严格的数学研究中，我们只能依赖于定义、而不能求助于直观），因此，理论的数学命题就不能被看成对于客观实在量性规律性的直接刻画。这也就是说，相对于素朴的研究而言，（非形式的）理论的数学研究是一个包含有以下各个环节的更为复杂的过程：i)“构造性”思维活动，即是以客观实在为背景通过抽象而建立“独立的”数学结构；ii)发现性思维活动，这是指以已建立的数学结构为直接对象去从事研究；iii)实践的检验，即是通过社会实践来判定所说的理论是否正确地反映了相应的客观实在。①

① 依据上面的分析，就非形式的数学理论而言，我们就可引进两种不同的真理性概念：“内部真理性”和“外部真理性”。所谓“内部真理性”是指个别命题相对于前提的“可证明性”；另外，所谓“外部真理性”则是指理论作为一个整体是否正确地反映了相应的客观实在。显然，按照这样的定义，内部真理性就是从属于外部真理性的，因为，只有在整个理论正确地反映了相应的客观实在的情况下，关于个别命题内部真理性的谈论才是有意义的。另外，外部真理性则又不能简单地被等同于“可应用性”，因为，一个理论之所以是有用的，就因为它正确地反映了客观实在，因此，可应用性就是由真理性所决定的。

除去经验性以外，我们再来对非形式数学理论的拟经验性作一分析。应当指出的是：

第一，我们是在普特南的意义上，而并非是在拉卡托斯的意义上使用“拟经验性”概念的。这就是说，我们所说的拟经验性并非是指理论中的命题都只是大胆的猜测（对此只能加以证伪、而不能予以证实），而主要是指数学的真理性不仅依赖于其在实际活动（社会实践）中的成功性，而且，在一定的范围内，也可以建立在其在数学研究活动的成功性之上。（这事实上也就是把实践的范围由通常所说的社会实践推广到了数学实践。）

第二，与上面所说的经验性相比，这里所说的拟经验性应当说是一个局部性概念，即主要是就某些公理而言的。这也就如哥德尔在论及集合论公理时所指出的，某些公理的真理性建立在它们在数学研究中的成功性之上。例如，结论、特别是“可检验的”结论的丰富性，这些结论不利用所涉及的公理也是可以证明的，但是，如果引进了这一公理的话，它们的证明就将大大简化并易于发现；又如新的公理导致了强有力的方法或对于整个理论更深刻的理解；等等。（对此可参见«What is Cantor's Continuum Problem?»，载«Philosophy of Mathematics, Selected Readings»，1983年版，第477页.）从而，就如一般命题的“可证明性”（内部真理性）一样，公理的“拟经验的真理性”也从属于整个理论的真理性（外部真理性）。

最后，如果把考察的范围由真理的检验扩展到真理的发现，拟经验的概念就不仅可以被用于公理，而且也可被用于一般的命题。例如，数论中很多著名的猜想，如哥德巴赫猜想等，就都是通过实例的观察得到发现，并借助于“实验”——如实际计算——得到初步证实的。著名数学家欧拉曾明确地写道：“数学这门科学，需要观察，也需要实验。”由于这里所说的观察、实验都是就数学对象而并非是就物质对象而言的，因此，上述论述也就清楚地表明了相应结论的拟经验性。

综上所述，我们就应在所说的意义上去肯定非形式数学理论的经验性和拟经验性。又由于个别命题的拟经验真理性归根结蒂地说是由整个理论的经验真理性所决定的，因此，我们就应赋予理论的经验性以主要的地位。这就是说，非形式数学理论是通过相对独立的数学结构的"构造"与研究来反映客观世界的量性规律性的。

4．形式数学理论的模式真理性

与非形式的数学理论相比，形式数学理论的主要特点是：在相应的数学研究中我们完全不考虑所说的理论是否具有或具有什么样的客观意义，而只是从纯形式的角度去进行研究，即把形式数学理论看成是所谓的"假设—演绎系统"：在其中我们所研究的主要是从什么样的前提出发可以推出什么样的结论。显然，按照这样的理解，事实上我们就完全切断了数学理论与客观实在的联系。

就形式数学理论的真理性问题而言，我们应当注意以下几点：

第一，从历史（或认识发生）的角度看，大部分形式数学理论都通过非形式数学理论的转移与客观实在有着一定的联系。这种联系可能是较为直接的：一些重要的形式理论，如希尔伯特所建立的形式几何理论等，即是以相应的非形式理论为直接背景通过形式抽象得到建立的；这种联系也可能是较为间接的：一些形式理论，如非欧几何的理论等，并不具有明显的直观意义（至少在当时是这样），而是以已建立的形式理论（或非形式理论）为基础通过其它形式的数学抽象得到了建立。但是，由于在形式的数学研究中我们完全不考虑理论所可能具有的客观意义，因此，在所说的意义上，形式数学理论的直接的经验证实（或证伪）就是不可能的。

显然，上述的分析与拉卡托斯关于形式数学非经验性的断言是完全一致的，即"没有人会声称数学在下述意义上是经验的：它

的潜在的证伪者是特称的时空命题。"而这事实上也就是普特南数学哲学理论的一个重要缺陷所在：由于未能对非形式数学理论与形式数学理论作出明确的区分，因此，尽管他的关于数学经验性(及拟经验性)的断言可以看成对非形式数学理论真理性的正确分析，但这一观点却不能由非形式的数学理论直接推广到形式的数学理论。另外，也正由于在形式的数学研究中我们完全不考虑理论所可能具有的客观意义，因此，拉卡托斯所说的"启发式证伪者"也就不可能是真正意义上的"证伪者"。这就如同拉卡托斯本人所已认识到了的："启发式证伪者归根结蒂地说并非真正意义上的证伪者：它并不证伪假设，而只是建议这样的证伪——这种建议是可以不予考虑的。"(«A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics»，载«Mathematics, Science and Epistemology»，第40页.)显然，按照这样的分析，事实上我们也就不可能通过证伪者性质的分析对形式数学理论的真理性作出进一步的说明，而这也许就是拉卡托斯为什么未能对(形式)数学理论的性质作出彻底分析的一个原因。

第二，与非形式的数学理论一样，我们也可认为形式的数学理论定义了一个确定的数学结构，理论中的命题则可看成关于这一结构的真理；但是，由于形式与非形式的对立，在两者之间又存在着以下的重要区别：①由于非形式的数学理论具有明显的直观背景，相应的数学结构就可看成客观实在结构特性的抽象反映，即是一种"已给出的"结构；与此相反，由于形式的数学理论未必具有明显的直观意义，因此，相应的数学结构就只能说是一种"可能的"结构。① ②在非形式的数学研究中，我们是以客观实在为直

① 对于所说的"可能的数学结构"必须与语言哲学中所说的"可能世界"明确地加以区分：后者是在与真实世界相对立的意义上使用的，这也就是说，尽管所说的

观背景进行研究的，因此，尽管数学结构在形式上构成了数学研究的直接对象，但是，数学家们所主要关心的则是所说的数学结构是否正确地反映了相应的客观实在的问题(如前所述，这也就是非形式数学理论经验真理性的基本意义)；与此相反，由于在形式的数学研究中我们完全不考虑所涉及的理论是否具有或具有什么样的客观意义，因此，在所说的意义上，相应的数学结构就成了独立的研究对象，而这也就清楚地表明了我们应对形式数学理论的真理性作出与非形式数学理论不同的解释。

第三，以上面的讨论为基础，我们可以对形式数学理论的真理性作出如下的进一步分析：

(1) 由于数学理论是一种逻辑构造，因此，对形式数学理论来说，首要的问题就是应当满足逻辑合理性的要求，即整个理论在逻辑上应当是无矛盾的。一般地说，只有一个理论是相容的，才能被认为是确定了一个可能的数学构造。

关于形式数学理论相容性的要求在理论上显然是完全合理的。但是，从实际的数学研究看，这一要求却既非必要也不是充分的。所谓相容性的要求并非是必要的，在此并不是指我们可以轻易地置理论的不相容性予不顾(与此相反，无论就形式数学理论或是就非形式数学理论而言，一旦在其中发现了矛盾〔悖论〕，我们就应对此进行修正或改进以排除矛盾)，而主要是指在大多数的情况下数学家们根本不关心理论的相容性问题：这不仅是因为哥德尔的不完全性定理已经表明对于足够丰富的形式数学理论来说，严格意义上的相容性证明是不可能的，而且是因为数学家们通常对自己理论的合理性(进而，相容性)有着充分的信念。另外，

"可能世界"是抽象思维的产物，但是，它们是具有(或者说，曾经具有)成为真实世界的可能性的，只是这种可能性未能得到实现；与此相反，"可能的数学结构"则是在与"已给出的数学结构"相对立的意义上使用的，即是指它们并不具有明显的客观意义，但无论其是否具有客观意义，数学结构都不可能是如同真实世界那样的真实存在。

尽管一些数学家在某些场合确曾表达了这样的意见，即认为相容性对于(形式)数学研究来说是一个充分的条件。如柯亨就曾指出，数学是一种纯粹的符号游戏，其唯一的要求就是这种游戏不会导致矛盾。(可参见«Set Theory and the Continuum Hypothesis», New York, Amsterdam,1966年, 第154页。)但是，就实际的数学研究来说，数学家们并没有真正地去建立各种(看来是)相容的数学系统，而是表现出了明显的选择性。这种选择性归根结蒂地说是由数学研究的目的性所决定的，而这也就表明了相容性的要求对于(形式)数学研究来说并非是充分的。

(2) 就实际的数学研究而言，数学家们在建立新的形式数学理论时，他们所关注的主要是这一数学构造的合理性问题，即相应的抽象思维活动能否看成是一种合理的数学创造。一般地说，正是这种关于数学思维合理性的信念使他们确信自己所建立的理论是相容的，同时也使数学家们切实地感到了自己工作的意义。

所谓数学思维的合理性，归根结蒂地说，即是指相应理论的客观真理性，即这一理论是否正确地反映了客观世界的量性规律性，而后者则又主要体现在这一理论在实际活动中的成功性。但是，由于在形式的数学研究中我们是完全不考虑理论所可能具有的客观意义的，也即在形式上完全切断了数学理论与客观实在的联系，因此，形式数学理论的合理性就不可能直接建立在这种“经验的”论据之上。

如果局限于形式的数学研究进行分析的话，数学思维的合理性事实上主要建立在“拟经验的”论据之上——应当注意，与前面所提及的非形式数学理论的“拟经验性”不同，这里所说的“拟经验性”是一种整体性的概念，也即是就整个理论而不仅仅是就其中的某一公理(或命题)而言的。具体地说，这也就是指形式数学理论的合理性主要体现在它对于数学研究所具有(或可能具有)的认识论和方法论的意义上(对此可统称为理论的“数学意义”)，如

这一理论是否导致了(或可能导致)认识的发展和深化以及方法论上的进步等。例如，作为数学理论合理性的标准，很多数学家提出了“富有成果性”和“富于启示性”的概念，而这主要地即是就理论的数学意义进行分析的。麦克兰则更明确地提出了“广度、清晰度、深度”这样三个概念。他写道:“为了使抽象沿着正确方向确切地前进，需要这三个概念。”具体地说,“一个数学概念的广度是指这个概念的应用场合的多样性，以及所作抽象的确切性和相关性，它也提醒人们：定理的推导不仅受制于严密性，而且还受制于应用的目的和抽象的起源”；“其次，抽象已经增加了对表示清晰性的要求；如果研究的对象是抽象的，那么它一定要通过精确而抽象的描述来理解，而不是通过它的直观内容来理解”；第三，“一个数学概念的深度涉及到这样一种途径，按此途径这个概念发展成待解决问题所基于的不明显但更基本的结构和概念。”(《数学模型》，同前，第54页。)显然，这三个概念都直接涉及到了形式数学理论的合理性问题。另外，基切尔在《数学知识的性质》一书中也曾对数学活动的合理性问题进行了分析。他指出，以下的各种思维活动都是合理的：一般化、严格化、系统化(可参见第5章)。显然，这主要地也是从认识论和方法论的角度去从事分析的。

为了更清楚地说明问题，在此还可结合在数学中有着广泛应用的弱抽象和强抽象这样两种思维活动形式来进行分析。

所谓弱抽象，也即通常所谓的“一般化”。就是指由原型(或已建立的概念和理论)中选取某一特征(侧面)加以抽象，从而获得比原结构更为广泛的结构，而原结构则可看成后者的特例。例如，由各种具体的代数结构(例如，各种数系)抽象出群的概念就可看成弱抽象的典型例子。另外，所谓强抽象，也即通常所谓的“特殊化”，则是指通过引入新特征强化原结构而实现抽象，从而，所获得的新结构就只是原结构的特例。例如，由群的概念出发进而去引出环和域的概念就可看成强抽象的实际例子。弱抽象与强抽象

在形式的数学研究中起着重要的作用。例如，在现代数学研究中有着重要影响的布尔巴基学派的工作在一定意义上就可看成弱抽象与强抽象的自觉运用：我们首先通过一系列的弱抽象获得了三种最基本的数学结构——代数结构、序结构和拓扑结构，然后，由这三种"母结构"出发，又可通过各种可能的组合("杂交")去得出各种可能的数学结构，也即所谓的"子结构"。而这事实上就是一系列的强抽象。

与各个具体的形式数学理论相比，关于弱抽象与强抽象这两种思维形式合理性的断言显然是更为一般的，那么，究竟什么是这种断言的依据呢？不难看出，如果我们是以客观实在(或具有明显直观意义的非形式数学理论)为原型去进行(弱)抽象，这种抽象活动的合理性即可依据客观实在与抽象理论之间的关系得到说明。这就如同列宁所指出的："当思维从具体的东西上升到抽象的东西，它不是离开——如果它是正确的——真理，而是接近真理。物质的抽象，自然规律的抽象，价值的抽象，一句话，那一切科学的(正确的、郑重的、不是荒唐的)抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。"(《哲学笔记》，人民出版社，1974年，第181页。)但是，就实际的数学研究而言，弱抽象与强抽象往往是相互渗透、密切相关的，而且，强抽象的合理性显然又不可能借助于"由抽象的规定到思维中的具体的复归"得到简单的说明(因为，在数学中人们并不是［或者说，并不仅仅是］在严格的复归意义上使用强抽象的)，从而，总的来说，我们就不可能单纯凭借理论与客观实在的联系来对弱抽象与强抽象的合理性作出说明。事实上，正如人类的认识是在特殊与一般的辩证运动中不断得到发展和深化的，弱抽象与强抽象就是"从特殊到一般、再由一般到特殊"的认识规律在数学中的具体表现，从而，这两种思维运动的合理性主要地就是从认识论的角度去进行分析的结果。

(3) 关于形式理论数学意义的分析显然是一种理性的考虑，

除此以外，非理性的因素在形式的数学研究也有着十分重要的作用。

具体地说，所谓非理性的因素在此主要是指直觉的判断及美学的标准。许多数学家都曾直接肯定非理性的因素在数学研究中的作用。例如，著名数学家冯·诺意曼写道："我认为数学家无论是选择题材还是判断成功的标准，主要地都是美学的；"又"数学家成功与否和他的努力是否值得的主观标准，是非常自足的、美学的、不受（或近乎不受）经验的影响。"（《数学家》，载《数学史译文集》，上海科学技术出版社，1981年，第122、121页。）另外，鲁滨逊也曾写道："这是一个事实，就是已经组织起来的数学世界在很大程度上是按照我们关于数学美及纯粹数学的重要性的直觉组织起来的。"（《Formalism 64》，同前，第235页。）

由于直觉在数学研究中有着十分重要的作用，因此关于数学直觉的分析及如何培养直觉能力的问题就是数学方法论研究的一个重要课题；另外，尽管数学的美感具有强烈的个体性和感情色彩，但数学美从整体上说又并非什么纯粹主观、不可捉摸的东西，而是有其确定的客观内容的，我们并可通过这种客观内容的分析去说明数学中对于美的追求的合理性。对于所有这些我们将在第6章中作出专门的分析，在此则将仅仅强调这一点：就形式的数学研究而言，我们在一定程度上可以单纯凭借直觉（特别是审美直觉）去进行判断，从而，除数学意义的分析外，我们就获得了又一种（相对）独立的、（近乎）自足的判断标准。

综上所述，由于形式数学理论可以看成关于（相对）独立的数学结构（模式）的真理，关于这种研究的意义又有着独立的、自足的判断标准，因此，就形式数学理论的真理性而言，我们就应引入另一种与客观真理性（现实真理性）不相同的概念——模式真理性。

具体地说，如果一个形式数学理论代表了一个具有丰富数学

内涵或直觉意义的数学结构，这一理论就可被认为具有模式真理性。

5. 数学真理的层次理论

上面我们分别对素朴的数学知识、非形式的数学理论及形式数学理论的真理性进行了分析，由于数学的实际发展早已超出了素朴的水平，而且，更为重要的是，现代的数学研究并不是单纯地在非形式数学理论或形式数学理论的范围内进行的，而正是通过非形式研究与形式研究（相应地，应用数学与纯粹数学）的相互渗透、相互转化才能实现自己的无限发展，因此，从整体上说，我们就应同时考虑以下的两种真理性，并进而建立数学真理的层次理论。

(1) 模式真理性。这是指数学理论决定了一个确定的数学结构，这一理论就其直接形式而言就可被认为是关于这一数学结构的真理。

(2) 客观真理性（现实真理性）。这是指数学理论是对于客观世界量性规律性的正确反映（对于“量”的概念，我们将在第三节中作进一步的分析）。①

进而，对于这两者的关系，可以分析如下：

第一，由于数学研究的最终目的在于认识（和改造）客观世界，因此，客观真理性与模式真理性相比就更为重要。也正因为此，如果一种数学理论始终未能在社会实践中得到成功的应用，也并不具有明显的数学意义，那么，无论它是如何地精致，这一理论都不可能具有强大的生命力，并必然地会出现发展的停顿，甚至最终为人们所遗忘；与此相反，如果一种数学理论在社会实践中

① 在此应当注意“模式真理性”与“内部真理性”的区分：如前所述，内部真理性是就理论中的个别命题而言的，从而就从属于整个理论真理性的分析；而模式真理性（及客观真理性）则是就整个理论而言的。

已被证明是十分有效的，那么，即使这一理论存在这样或那样的缺陷或弊病，例如，已被证明是不相容的，这一理论在一定意义上仍是可接受的，而只须对此进行必要的修正和改进。

第二，在肯定客观真理性的主导地位的同时，我们又应清楚地看到引进独立的模式真理性的必要性和重要意义。事实上，由上面的分析可以看出，对于模式真理性的确认在一定意义上即是对于数学思维"自由性"的肯定，由于这种"自由思维"即是思维能动性在数学中的具体表现，因此，就具有重要的认识论和方法论的意义。另外，从更深的层次上说，对于模式真理性的确认事实上即是体现了数学的另一种属性(功能)，即数学不仅是一门科学，而且也是一种文化，而又正如文学、艺术等文化形式一样，在其中我们所直接涉及的正是人类自身的创造物。

综上所述，数学的真理性就具有一定的层次性，即

第一层次：模式真理性；

第二层次：客观真理性。

最后，应当指出，模式真理性事实上是以一个(相对)独立的数学世界的存在性为必要前提的，因此，数学真理性问题的研究就是与数学本体论与认识论的深入分析直接相联系的。在下一节中我们就将对模式观的数学本体论及模式观的数学认识论作出介绍——正如前面所已指出的，这两者与数学真理的层次理论一起构成了模式观的数学哲学理论的主要成分。

4.2 模式观的数学本体论与模式观的数学认识论

1. 问题的提出

数学的本体论问题可以概括地表述为：数学对象能否看成一

种独立的存在？如果可以，这是一种什么样的存在；如果不行，则又应当怎样理解数学研究的意义？

如果局限于某些基本的数学概念去进行分析，上述问题的解答似乎是不难找到的。第一，数学对象不可能是一种不依赖于思维的独立存在。例如，谁曾见到过一，我们只能见到某一个人、某一棵树、某一间房屋，而决不会见到作为数学研究对象的真正的“一”（注意，在此不应把“一”的概念与其符号相混淆），类似地，我们也只能见到圆形的太阳、圆形的车轮，而决不会见到作为几何研究对象的真正的“圆”（在此也必须对“圆”的概念与纸上所画的圆明确地加以区分）。从而，就如恩格斯所指出的：“全部所谓纯数学都是研究抽象的，它的一切数量严格说来都是想象的数量。”第二，尽管数学对象并非不依赖于思维的独立存在，但是，所说的基本概念又往往具有明确的客观意义。例如，“一”的概念就是所有单个事物在数量上的共同反映；“圆”的概念则集中表现了所有圆形事物在（几何）形式上的共同性质。从而，这也就如同恩格斯所指出的：“自然界对这一切想象的数量都提供了原型。”（《自然辩证法》，《马克思恩格斯选集》，人民出版社，1966年，第608、605页。）综上所述，我们在此就可引出这样的结论，数学对象并非不依赖于思维的独立存在，而是抽象思维的产物；但是，它们又有着确定的客观内容，即是思维对于客观事物量的属性的反映。

应当指出，古希腊的亚里士多德早就从十分一般的角度对数学的本体论问题进行了分析。他集中讨论了所谓的“分离问题”，即理念究竟存在于个别事物之中，还是在个别事物之外与个别事物相分离的独立存在？由于数学对象在柏拉图学派那里也被认为是一种理念，因此，作为分离问题的一种特殊情况，亚里士多德就接触到了数学的本体论问题。亚里士多德认为，数学对象事实上只是一种抽象的可能性。他写道，数学中一般的命题，它们是研究大小的量和数的；但是，它们研究的大小和数，不是那些我们

可以感觉到的、占有空间的广延性的、可分的大小和数，而是作为某种特殊性质的大小和数，是我们在思想中将它们分离开来进行研究的。正是在这样的意义上我们说数学对象是存在的，但这又只是一种抽象的存在，即只是由于数学家的抽象思维它们才得以由“潜在的”转化为“现实 的”。(可参见《形而上学》，商务印书馆，1983年，第13卷，第三章。)显然，亚里士多德的这一观点与上面所引出的结论是基本一致的。

那么，数学的本体论问题为什么仍然在数学哲学的研究中占有十分重要的地位，并事实上成为现代数学哲学研究的一个焦点呢?我们认为，这里存在着两个方面的原因：

首先，理论本身存在一定的缺陷。例如，正如前面所已指出的，任何稍有数学经验的人都有这样的体会：在数学中我们所从事的是一种客观的研究；但是，如果数学对象只是抽象思维的产物，而抽象思维又显然属于各个个人并具有一定的任意性，那么，我们就应怎样来解释数学研究的客观性(确定性)与思维活动的主观性(任意性)的矛盾呢?

其次，数学的现代发展也带来了新的问题。如所知，数学现代发展的决定性特点之一是研究对象的极大扩充，即由已给出的(或者说，具有明显直观背景)的量的关系和形式扩展到了可能的量的关系和形式。但是，人们却无法对这些“越来越远离自然界的、似乎是从人们的脑子中源源不断地涌现出来的概念”的客观意义作出明确的解释；特别是，现代的基础研究已经表明，间接解释的方法(化归的方法)在此也并非总是有效的，从而，这就直接促进了关于数学本体论问题的新的思考。

鉴于上述的理由，在数学的本体论问题上出现一些更为极端的立场就是不足为奇的了。其中最重要的即是柏拉图主义与形式主义。但又正如第二章中所已指出的，这两种观点又都具有严重的理论困难和缺陷，因此，我们就必须对数学的本体论问题作出更

为深入的分析，而这首先就是关于数学抽象的定性分析。

2. 数学抽象的定性分析①

抽象性通常被认为是数学的一个基本特性。例如，苏联著名数学家A.Д.亚历山大洛夫就曾从这样的角度对数学的特点进行过分析。他写道："抽象性在简单的计算中就已经表现出来，我们运用抽象的数学，却并不打算每次都把它同具体的对象联系起来，我们在学校中学的是抽象的乘法表——总是数字的乘法表，而不是男孩的数目乘上苹果的数目，或者苹果的数目乘上苹果的价钱等等。"又，"同样地在几何中研究的，例如，是直线，而不是拉紧了的绳子，……"（《数学——它的内容、方法和意义》，第1页。）一般地说，任何数学对象都是抽象的概念，从而，这也就在一定程度上表明了数学的抽象性。

但是，对象的抽象性显然并非数学的特有性质；恰恰相反，每一门科学事实上都是一个概念的系统，而概念则是思维对于客观实在的抽象反映。这也就如列宁所指出的："认识是人对自然界的反映。但是，这并不是简单的、直接的、完全的反映，而是一系列的抽象过程，即概念、规律等等的构成、形成过程，……"（《哲学笔记》，第194页。）从而，为了深刻地揭示数学抽象的特殊性质，我们就必须作进一步的分析。对此可以从抽象的内容、性质和程度这样几个角度来进行论述。

（1）特殊的抽象内容。数学是从量的侧面来反映客观实在的。这也就是说，在数学的抽象中我们仅仅保留了事物的量的属性而完全舍弃了它们的质的内容。数学抽象的这一性质是与其它科学中的抽象大相径庭的。首先，在其它各门自然科学中，我们所主

---

① 在第六章中我们还将从方法论的角度对数学抽象的方法论原则及所谓的"抽象度分析法"作出介绍。

要关注的是质的问题，而不是事物的量的属性。其次，尽管在其它各门科学中也广泛用到了量的分析，但是，这种定量分析完全是为着相应的质的研究服务的。从而，总的来说，特殊的抽象内容就是数学与其它科学的根本区别所在。也正是在这样的意义上，数学就可被定义为量的科学。

但是，应当强调的是，对于所说的“量”，我们必须作辩证的理解。第一，作为量和质这一哲学基本范畴的一个环节，“量”这一概念具有十分确定的意义。一般地说，事物的量的规定性即是指事物存在与发展的规模、程度、速度、方式等。因此，在这一问题上的任何怀疑论或不可知论的观点都是错误的。第二，“量”并非是一个静止的、僵化的概念；恰恰相反，这一概念是随着人类实践的发展不断地发展和演变的。例如，从历史的角度看，数和形曾是“量”这一概念的两个基本意义——正因为此，就有如下的说法：“数学是研究数量关系和空间形式的科学。”但是，随着实践的发展，量的概念已经突破了这一历史的局限性，因此，如果在今天仍然机械地去坚持上面的说法就是不妥当的。一般地说，随着实践的无限发展量的概念必将展示出更为丰富的内容。

（2）数学抽象的逻辑性质。这是指数学对象是借助于明确的定义逻辑地得到“构造的”。这也就是说，无论所说的对象是否具有明显的客观意义，在严格的数学研究中我们都只能依靠所说的定义去进行（演绎）推理，而不能求助于直观。

在此我们并可对所说的“逻辑构造”作出如下的区分。第一，有些数学对象是借助于其它的对象明显地得到定义的，从而，它们就是所谓的“派生概念”。例如，圆就可以定义为“到定点的距离等于定长的点的轨迹”。第二，那些更为基本的对象，也即所谓的“初始概念”，是借助于相应的公理系统“隐蔽地”得到定义的。例如，如果一个理论是在“假设—演绎”系统的形式下得到发展的，所说的“假设”（公理）事实上即为相应数学对象的“隐定义”，因为，

正是借助于这些假设，所说的对象才得到了“构造”。

应当指出，数学对象的“逻辑构造”正是数学研究由素朴的水平上升到理论水平的直接表现，而又只有后者——这是与建立在直接经验之上的“归纳命题”相对立的——才能被认为真正的数学知识。也正因为此，在此就有必要引进（量化）模式的概念。所谓模式，一般地说，即是指抽象的数学理论，也即通常所说的数学结构；特殊地，如果一个数学命题是以某一抽象的数学理论为背景（或者说，是作为某一抽象数学理论的组成部分）得到建立（被接受）的，我们也可称之为一个数学模式。（模式的概念还可推广应用于计算方法、问题的表述方式和处理方法等。）

由于在严格的数学研究中我们只能依靠有关数学对象的定义，而不能求助于直观，因此，数学对象的逻辑定义事实上就是一种重新构造的过程。这也就是说，数学并不是对于客观实在的直接的反映，而是一种间接的反映。从而，与“数学是量的科学”这一大大简化了的“定义”相比，以下的说法就是更为恰当的：数学是通过相对独立的（数学）模式的建构与研究来反映客观世界的量性规律性的。显然，这也就更为清楚地表明了数学与其它科学的不同之处。

（3）特殊的抽象高度。这是指数学抽象所达到的高度远远超出了其它科学中的一般抽象。具体地说，尽管一些基本的数学概念具有明显的直观意义，但是，数学中又有很多概念并非建立在对于真实事物的直接抽象之上，而是较为间接的抽象的结果，即是在抽象之上去进行抽象，由概念去引出概念。例如，数学中所谓的“理想元素”（如复数、无穷远点等）就是这样的典型例子。另外，就现代的数学研究而言，这种高度的抽象性又突出地表现在公理化方法的现代发展，即由实质的公理化方法到形式的公理化方法的发展上：在形式的公理系统中，公理已不再是关于某种特定对象的“自明”的真理，而只是一种可能的假设，这也就是说，我

们已不是由所已给出的对象去建立相应的公理系统，而是借助于所谓的“假设——演绎”系统来从事可能的对象的研究，从而，公理化方法的这一发展事实上就意味着数学研究对象的极大扩充，即是由已给出的(或者说，具有明显直观背景)的模式扩展到了可能的模式。

3. 模式观的数学本体论

(1) 依据上面的讨论，即可对数学的本体论问题作出如下的进一步分析：

第一，数学以模式为直接的研究对象，而模式则是抽象思维的产物。

第二，由于模式是借助于明确的定义逻辑地得到“构造”的，而且，在严格的数学研究中，我们又只能依靠所说的定义，而不能求助于直观，因此，尽管某些数学对象在最初很可能只是少数人的“发明创造”，但是，一旦这些对象得到了“构造”，就立即获得了确定的“客观内容”，对此人们只能客观地加以研究，而不能再任意地加以改变。显然，数学抽象的这种逻辑特性也就是数学能够成为一门科学的一个必要条件。

第三，模式是抽象思维的产物，但又并非是对于客观实在的直接、消极的反映，而是一种抽象(间接)、能动的反映。因为，首先，概念的形成总是一个简单化(理想化)、粗糙化、僵化的过程。即如列宁所说：“如果不把连续的东西割断，不使活生生的东西简单化、粗糙化，不加以割碎，不使之僵化，那么我们就不能想象、表达、测量、描述运动。思维对运动的描述总是粗糙化、僵化，不仅思维是这样，而且感觉也是这样；不仅对运动是这样，而且对任何概念也都是这样。”(《哲学笔记》，第285页。)因此，数学对象的逻辑定义就是一种“重新构造”的构造，而并非对于客观实在的直接反映。其次，正由于数学对象的逻辑构造在一定意义上就意味着与

真实的脱离，因此，这也就为思维的创造性活动提供了极大的自由性。例如，正如前面所已提及的，数学的研究对象就由于公理化方法的现代发展得到了极大的扩充，即由“已给出的”模式扩展到了“可能的”模式。显然，数学思维的这种“自由性”也就表明了我们不能绝对地去肯定任何一种具体的数学理论的客观意义（客观真理性）。事实上，如果我们不断地由概念去引出概念，在抽象之上去进行抽象，最终就有可能因完全脱离实际而走向荒谬，这正是悖论的发现所给予我们的重要启示。

第四，列宁曾经指出：“人的概念就其抽象性、隔离性来说是主观的，可是就整体、过程、总和、趋势、泉源来说却是客观的。”（《哲学笔记》，第223页。）类似地，尽管我们不能以一种直接、简单的形式去肯定每一种数学理论的客观意义；但是，由于理论研究的最终目的在于应用，而且，从历史（或认识发生）的角度看，形式的数学理论又往往通过非形式数学理论的“过渡”与客观实在有着较为直接或间接的联系，因此，我们也就应当在同样的意义上肯定数学的客观性，即就整体、过程、总和、趋势、泉源来说，数学是对于客观世界量性规律性的反映。

最后，由于数学模式具有确定的“客观内容”，这种内容又不可能借助与真实世界的联系得到直接、简单的说明，因此，这些模式就构成了与真实世界不相同的另一类独立的存在；另外，又由于模式是抽象思维的产物，而且，就整体、过程、总和、趋势、泉源而言又与真实世界有着必然的联系，因此，我们就不应把数学对象看成完全独立的存在，而应注意它们与真实世界及思维活动之间的辩证关系。

上述各点即为建立模式观的数学本体论提供了必要的基础。

（2）为了对数学的本体论问题作出更为明确的解答，可以借助于波普尔的世界3理论来进行表述。下面先对这一理论作一简要的介绍。

如前所述，波普尔是现代科学哲学的主要代表人物之一。然而，他的哲学研究又并不仅限于科学哲学，而是对一般哲学乃至政治哲学都进行了广泛、深入的研究。就本体论的范围而言，波普尔的一项重要工作就是开展起了著名的三个世界的理论。①

具体地说，波普尔认为，宇宙的发展是一个包含了突变的进化过程，从而就具有明显的层次性，也即可以区分出如下的三个世界：① 物理世界层次，亦可简称为世界1；② 精神世界层次，包括意识状态、心理素质和无意识状态，可称为世界2；③ 思想内容的世界，即是指思想的客观内容，这也就是所谓的世界 3 。

对于世界 1 和世界 2 ，人们是较为熟悉的（除去新术语的使用外），而所谓的世界 3 则应当说是一个较新的概念。波普尔曾对世界 3 的性质作了如下的说明：

第一，由于世界 3 即是指思想的客观内容，因此，这就不应被认为是一种不依赖于思维的独立存在；但是，即如我们可以自由地去谈及“理论自身”、“问题自身”、“论证自身”一样，在一定条件下我们也可切断世界 3 与世界 2 的联系而谈及一个独立的世界 3 。显然，这也就是关于三个世界划分的最基本内容。

第二，语言为思想客观内容的相对独立提供了必要的外在(物质的)形式。

第三，尽管世界 3 是人类思维活动的产物，但是，这种创造性活动又必然会产生未曾预料的副产品，如新的未曾预料的事实，新的未曾预料的问题等等。从而，思想的客观内容在借助于语言“外化”为世界 3 的对象后又构成了新的认识活动的对象，而这种

---

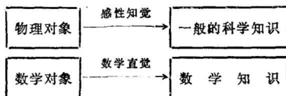
① 在访英期间，笔者曾两次拜访了波普尔爵士。在交谈中波普尔遗憾地指出，他的世界 3 理论尚未得到足够的重视。笔者认为，波普尔的这一说法是有一定道理的，因为，世界 3 理论中的确还有很多地方值得人们作进一步的思考和研究。以下的论述就可看成这一方向上的一个努力。

认识活动则主要是一种发现，而并非是创造的活动。

（3）由于前面的讨论已经表明数学对象在本体论问题上具有如下的性质：数学模式就其自身而言并非真实的存在，而是抽象思维的产物；但是，它们又有着确定的客观内容，并事实上构成了数学研究的直接对象，因此，如果采用波普尔的语言的话，我们就可以说，数学对象即是世界3中的独立存在。

但是，我们又应明确地指出在"数学世界"与波普尔的世界3之间所存在的重要区别：

第一，波普尔曾把自己的世界3笼统地描述为"没有认识主体的知识"，认为其中包含了理论、问题、论证、猜想等各种成分，从而，这就是一个"大杂烩"式的世界，即与物理世界是很不相同的。然而，在数学世界与物理世界之间却具有一种明显的对称性：两者的基本成分分别为数学对象和物理对象，数学及一般科学则分别为关于各自对象(及其联系)的真理；我们甚至可以在近乎"对称"的意义上去谈及数学直觉与感性知觉的类比：



第二，前面的分析已经清楚地表明了数学模式的逻辑性质，这也就是数学对象与世界3中其它对象的一个根本区别——事实上，波普尔并未对世界3中一般对象的性质作出明确的说明，而只是指出思想的客观内容借助于语言形式转化成了世界3中的独立对象。但是，由于这里存在有个体与群体的对立，通常使用的自然语言又具有明显的局限性(不规则性、含糊性)，因此，这些对象事实上不可能成为精确科学的研究对象。

鉴于上述的分析，在此就有必要引进一个独立的数学世界的

概念；进而，对数学的本体论问题则就可以作出如下的明确解答：

① 数学对象是数学世界中的独立存在。

② 数学世界是抽象思维的产物：数学对象是借助于明确的定义逻辑地得到"构造"的。也正因为此，数学对象就具有确定的"客观内容"，并构成了数学研究的直接对象。

这就是模式观的数学本体论。

4．模式观的数学认识论

下面再对数学的认识论问题作一分析。

（1）上面的讨论已经表明，相对于一般的科学研究而言，数学的认识活动具有一定的特殊性。这主要指数学家是通过模式的建构并以模式为直接对象来从事研究的，而不是对于客观实在量性规律性的直接反映。正因为此，我们也就可以更为具体地把数学"定义"为这样一门学科：在数学中我们是通过模式的建构、并以模式为直接对象来从事客观世界量性规律性的研究的。

（2）由于数学模式是抽象思维的产物，思维活动又总是按照一定的模式进行的，因此，在所说的意义上，外在的数学模式就可看成内在的思维运动模式的直接表现。就数学的认识论问题而言，以下的事实是特别重要的，即不同的思维运动可能（也必然）会导致不同的量化模式。例如，无限观的不同就直接导致了关于无限的不同的数学模式，如直觉主义的潜无限模式，康托的实无限模式等。正因为不同的数学模式即是不同的思维运动模式的直接表现，对不同的、甚至是互相对立的数学理论我们就不能轻易地采取绝对肯定或绝对否定的态度。事实上，由前面的讨论已经知道，数学对象的逻辑定义即是一种"重新构造"的过程，即其中必定包含了对真实的脱离，进而，数学理论的实际应用也必然地包含了抽象的过程，即是一种近似的应用，因此，我们就不能依据理论在实际中的应用对其现实真理性作出绝对肯定或绝对否定的判断。毋宁说，数学理论的现实真理性只是一个相对的概念，在不同的

理论之间也仅有程度上的差异。一般地说，任何一种直接或间接地建立在对于客观实在合理抽象之上的数学理论都具有一定的现实真理性，同时也必然具有一定的局限性，因此，我们就不能采取绝对肯定或绝对否定的态度。①

(3) 波普尔曾经提出："我所认为特别重要的，并不是世界 3 单纯的自治性……(而)是我们自身与我们作品之间的关系，以及我们可以由此而获得的东西。" («Objective Knowledge», 第147页.) 我们也可从这样的角度对数学的认识论问题作出如下的进一步分析：

由于数学世界可以被认为另一类独立的存在，而这种相对独立的数学世界则又为数学研究提供了直接的工作对象，因此，在一定的限度内，数学的认识就可单纯凭借世界 2 与世界 3 之间的相互作用得到发展和深化。具体地说，这首先是对于已建立的数学结构的深入研究。这种研究主要是逻辑性的，也即是由已获得的结论(及有关的定义)去演绎出新的定理；另外，这种新的认识活动也可能建立在所谓的数学直觉之上——然而，应当注意的是，我们必须对这里所说的数学直觉与前面所提及的关于理论数学意义的直觉的判断(诸如审美直觉)明确地加以区分。事实上，正如前面已指出的，在数学世界与物理世界之间可以认为存在有某种"对称"关系，而这里所说的数学直觉则就是指对于数学模式的直接的、非逻辑的认识，从而，与感性知觉一样，它也代表了认识主体与认识对象之间的联系的一个方面。当然，由于数学对象并非真实世界中的存在，所说的数学直觉就不可能建立在感觉器官的功能之上；但是，人们具有这样的直觉能力是无足为奇的，因为，

① 现实真理的相对性显然更为清楚地表明了引进模式真理性的必要性，而后者则是以一个(相对)独立的数学世界的存在性为必要前提的。由此可见，数学真理的层次理论及模式观的数学本体论(及认识论)是密切相关、互相依赖的。

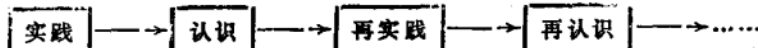
数学模式本身就是思维的产物，从而，在此所需要的就仅仅是使“外化”了的对象重新成为思维的内在成分，并建立起相应的“形象”（关于数学直觉我们将在第6章中作出进一步的分析）。综上所述，数学的认识可以单纯凭借演绎和直觉得到一定发展的事实就得到了解释。

其次，我们又可以以已建立的概念和理论作为“素材”去从事新的创造活动。例如，我们可以以已建立的理论或概念为基础通过弱抽象或强抽象去建立新的更为一般或较为特殊的理论和概念。显然，这种新的创造活动反过来则又极大地丰富了数学世界的内容，从而为认识活动的进一步深入和发展开辟了新的可能性。①

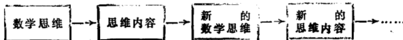
最后，应当指出的是，数学世界对于人们的认识活动还具有一定的规范和调节的作用（对此波普尔称之为世界3对于世界2的“反馈作用”）。具体地说，除去所已提及的由内在的思维运动模式向外在的数学模式的转化外，也还存在有相反方向上的运动。这就是说，一个数学模式在得到建立以后，如果被证明是十分有效的话，就会为大多数人所接受并成为整个思维模式的一个有机组成部分。例如，关于时间的直线型模型就是一个典型的例子。一般地说，数学即是对于模式的研究，而思维运动又总是按照一定的模式进行的，因此，我们也就应当充分肯定数学研究的普遍的认识论意义（对此在第三节中我们还将结合康德与怀特海的有关观点作进一步的讨论）。

(4)由于模式观的数学本体论与柏拉图主义有着重要的区别，

① 由此可见，传统的认识公式就是一个过分简化了的模式：



因为，上面的分析已经清楚地表明，在一定的条件下，数学的认识也可能单纯凭借世界2（思维活动）与世界3（数学世界）之间的相互作用得到一定的发展：



又由于对于数学现实真理性与模式真理性的肯定即是对于数学经验性与拟经验性的强调，因此，这里所倡导的模式观的数学认识论就是与先验论的数学观（无论就柏拉图主义的先验论、或是就分析真理论而言）直接相对立的。当然，在此我们又应明确地反对狭隘经验论的观点。事实上，前面的讨论已经表明，数学的认识可以独立于社会实践得到一定的发展，在一定限度内我们也可以单纯凭借直觉去对理论的数学意义作出判断，因此，我们就可在相对的意义上去谈及数学的先验性，但是这种先验性又显然不能被等同于数学在整体上的先验性。

4.3 比较与分析

上面我们已对模式观的数学哲学理论作了介绍，在这一节中将对这一观点与其它观点进行对照和比较，这不仅有益于更好地理解模式观的数学哲学理论，而且也将表明其它各种观点的错误或局限性。

1. 数学对象的构造性

上面关于数学本体论问题的分析明确肯定了数学对象的思维构造性，即认为数学模式并非不依赖于思维的独立存在，而是抽象思维的产物；由于直觉主义者（更一般地说，就是构造主义者）也曾突出地强调数学对象的构造性，因此，为了正确地把握模式观的数学哲学理论，首先就必须清楚地看到在这一观点与直觉主义的数学观之间所存在的重要区别。

(1) 模式观的数学哲学理论明确地肯定了数学理论的客观意义：尽管数学命题就其直接形式而言是关于世界3中数学结构的真理，但是，就整体、过程、总和、趋势、泉源来说，数学理论

又有着确定的客观内容，即是对于客观世界量性规律性的反映。与此相反，直觉主义者则完全否定了数学的客观意义。如直觉主义的主要代表人物之一黑丁(A.Heyting)就曾这样写道："数学思想的特性在于它并不传达关于外部世界的真理，而只涉及心智的构造。"(«Intuitionism; An Introduction», Amsterdam: North-Holland, 1956年，第8页.)这样，数学与客观实在的联系就完全被切断了。

(2) 模式观的数学哲学理论并未对数学的抽象思维作出任何人为的限制；而直觉主义者则突出强调了构造的"能行性"(在直觉上的"可信性")，从而对实无限的概念和方法采取了绝对否定的态度，并事实上造成了数学的"支离破碎"。这就如同黑丁所说："必须把由于直觉主义的反对而造成的数学的支离破碎，看成我们的观点的一个不可避免的推论"。(同上，第10页。)

(3) 模式观的数学哲学理论同时强调了数学对象在形式上的相对独立性，即明确承认一个相对独立的数学世界的存在性；而直觉主义则由于把思维活动与语言形式绝对地对立起来而否定了数学对象由内在的思维构造向外部的独立存在转化的可能性。例如，黑丁就曾断言："我的数学思想属于我个人的智力生活，并限于我个人的思想……"(同上，第8页。)显然，如果采取这样的立场，最终将不可避免地导致"数学唯我主义"和"数学神秘主义"，而这是与数学的科学性直接相抵触的。

综上所述，模式观的数学哲学理论与直觉主义的数学观就是大相径庭的。

其次，由下面的例子可以看出在"逻辑构造"与一般的抽象之间所存在的重要区别：

集合论的创建者康托曾对"集合的基数"这一概念作了如下的解释：

"所谓集合M的基数或势，我是指这样的一般概念或一般性质，它们是通过由集合的元素中抽去它们的性质以及元素间所可

能具有的联系(特殊地，次序关系)而获得的。”
显然，康托的这一段话清楚地表明了基数概念的直观背景，即这是两次抽象的结果，其中我们分别抽去了元素的性质及元素之间的次序关系(正因为此，康托就用$\overline{\overline{M}}$表示集合M的基数)；然而，又如弗雷格所指出的，如果仅仅停留在这种(素朴)水平上的话，我们是无法进行严格的数学研究的。因为，抽象的概念是极不精确的，从而，即使是由同一个对象出发，不同的人也可能通过抽象而获得不同的概念。例如，弗雷格指出，今设想有一支普通的铅笔，然后，要求一些实验者通过“抽去其性质”而获得一般的概念。弗雷格猜测道，实验者所给出的答案可能是很不相同的：某些非数学工作者可能会回答说“纯粹的有(存在)”或“纯粹的无”；第三个人可能会回答道“基数一”；但是，第四个人却可能说“基数二”，因为；他把木质与铅蕊看成是两种不同的对象；……。一般地说，弗雷格认为，我们完全可以设想，由于观点的不同，人们可以由任何给定的对象“抽象”出任意一个基数。显然，这种不确定性与不精确性也就清楚地表明了严格的数学研究不能建立在一般的抽象之上。

就基数的概念而言，为了避免所说的不确定性和不精确性，可以采用如下的定义：

$\overline{\overline{M}}$ = {N | N和M可以建立一一对应}。

显然，这就是我们所说的“逻辑构造”。

最后，我们又必须对数学抽象的逻辑特性与所谓的“数学的逻辑性质”明确地加以区分，也即应当清楚地看到模式观的数学哲学理论与逻辑主义观点的区别。

具体地说，我们在此所断言的仅仅是数学对象是借助于明确的定义逻辑地得到构造的，而并没有断言数学的对象可以由逻辑的概念出发得到明确的定义，进而，数学的定理可以由逻辑的法则出发并借助于相应的定义得到严格的证明。如所知，后者正是

逻辑主义的基本宗旨；然而，逻辑主义已被证明是一种错误的立场。①

2．本体论与认识论问题上"两难处境"的摆脱

第1章中曾经提及，一个好的数学哲学理论应当是与人们的"数学经验"相一致的。特殊地，就数学的本体论问题而言，赫斯则曾更为明确地提出了如下的三个经验事实：① 数学对象是由人们发明或创造的；② 它们并不是随心所欲地被创造出来的，它是在已有的数学对象的基础上经加工提出的，是由于科学和日常生活的需要提出的；③数学对象一经被创造，就具有完全确定的性质，我们要发现这些性质也许存在巨大的困难，但它们独立于我们有关它们的知识之外存在着。"(《复兴数学哲学的一些建议》，同前，第76页。)显然，模式观的数学哲学理论与所说的"数学经验"是完全相符的，并为此提供了合理的解释。

其次，我们再来看模式观的数学哲学理论是否克服了伯纳塞洛夫所谓的在本体论与认识论问题上的"两难处境"(可参见1.3节)。

(1) 前面的论述已经清楚地表明，对物理对象与数学对象的实在性应当作不同的理解：前者属现实世界(世界1)，后者则属

① 此外，应当指出，皮亚杰曾从发生认识论的角度对数学对象的思维构造性进行过分析。皮亚杰指出"……这种方式就是一个再建构的过程。……就是把从已发现的结构中抽象出来的东西投射或反射到一个新的层面上，从而用这种东西再建构它们的过程。……再建构过程就是一种新的建构，它丰富着原来的结构，由于这一转换采取了运算的形式，运算就通过把原来的结构从它那具体内容中解放出来而为它提供了一个更为一般和抽象的形式。同样是这个过程允许我们进一步分离一些不同结构中共有的元素，并协调到同样更为一般的结构中去。"皮亚杰还曾对这些活动的非先验性进行了分析。他指出："如果说主体的活动的确在一种意义上先验地与经验相联系，但它却显示出一种无限的建构或构造经验的能力，从而不具有先验论的两个基本特征：具有确定预先决定所有后来建构的已完成结构，以及从一开始强加的必然性。"(《数学认识论与心理学》，载《自然科学哲学问题》，1988年，第一期。)

于数学世界（世界 3）。因此，我们就不能用一个单一的本体论解释把两者简单地统一起来。但是，在明确地作出了现实世界与数学世界（世界 1 与世界 3）的区分的前提下，我们又可以说对数学命题与物理命题都应作"实在论"的解释，也即应对数学命题的真理性作出塔尔斯基意义上的解释，这样，两者在形式上就重新得到了统一。（显然，这也就满足了古德曼所提出的"客观性原理"。）

(2) 上述关于数学对象客观实在性的断言并不会造成认识论上的严重困难。因为，第一，认识主体与数学世界（或者说，世界 2 与世界 3）并不是一个封闭的系统。恰恰相反，就整体、过程、总和、趋势、泉源来说，数学的认识活动仍然是由社会实践所决定的。第二，我们应当承认数学的认识活动相对于社会实践具有一定的独立性；但是，这种相对独立的认识活动又可以依据模式观的数学哲学理论得到合理的解释。例如，正如第二节中已指出的，由于数学模式本身就是一种思维构造，因此，人们具有关于数学对象的直觉就是不足为奇的。更为一般地说，这种认识活动显然就是思维能动性的具体表现。

综上所述，模式观的数学哲学理论就可看成对于贝纳塞洛夫所说的数学哲学研究的理论困难的一个解决。

最后，应当指出，一些学者曾经从文化的角度对数学的本体论问题进行了探讨。例如，怀特(L. White) 在《数学实在的所在》一文中指出："整个数学，以及它的全部'真理'和'实在性'都是人类文化的一个部分"；"因此，数学实在独立于个体意识而存在，但却完全依赖于人类意识。"（载《文化科学——人和文明的研究》，浙江人民出版社，1988年，第273页。）显然，就数学的客观性及数学对象对于思维的依赖性而言，这种观点与模式观的数学哲学理论是完全一致的。由于这种观点突出强调了数学的"文化本质"："数学真理存在于个人降生于其内的文化传统之中，这样，文化传统便从外部进入他的大脑"，因此，关于人们何以总是认为存在有

一个独立的数学世界的现象就得到了较好的解释："由于数学的和其它科学的概念总是从外界进入个人的头脑，因此，直至今天，每个人都以为它们来自外部世界而不是来自人为的文化。"（同上，第273、276页。）但是，这种观点又存在着以下的局限性：它过分地强调了数学的文化属性及其与一般文化的共同性，而忽视了数学抽象的客观内容以及数学抽象的特殊的逻辑性质。显然，如果对后者缺乏明确认识的话，我们就无法对数学在实践中的成功应用及其严密性作出解释，而这正是数学作为一门科学的主要特征，也是数学文化能得以延续的一个必要条件。

3. 由条件真理论到层次真理论

按照上面的论述，关于数学抽象逻辑性质的分析与数学对象客观实在性的断言显然是一致的，因此，普特南所谓的关于"数学的对象—集合的观点"与"数学的模态—逻辑的观点"的对立就是不存在的，我们自然也不必进一步去追随他所倡导的关于"对象—模态"的双重观点。（参见 3.2 节。）

其次，我们还可从更为一般的角度对条件真理论的观点作一分析：

(1) 如果局限于纯形式的数学理论进行分析的话，条件真理论的观点是有一定合理性的；但是，即使就所说的范围而言，这种观点也具有明显的局限性。第一，条件真理论者并没有对数学对象的客观实在性作出明确的断言，从而，在数学的本体论问题上就是不彻底的；而且，这种不彻底性又必然会在认识论的问题上造成新的困难。例如，我们应当如何去解释人们具有关于数学对象的直觉的事实。第二，这种观点不能为实际的数学活动提供合理的解释，即数学家为什么不实际地去从事各种可能的"假设—演绎"系统的研究。容易看出，上述分析事实上也就清楚地表明了由所谓的条件真理性（逻辑真理性）过渡到模式真理性的必要性。

(2) 形式数学理论只是全部数学的一个部分，而如果就整体进行分析的话，我们就显然必须直接肯定数学的客观真理性，不然的话，数学在实际活动中的成功应用就无法得到合理的说明。

综上所述，我们就必须用数学真理的层次理论去取代条件真理论。

最后，应当指出，上述关于条件真理论的分析对于形式主义来说基本上也是适用的。这就是说，即使就纯形式的数学研究而言，形式主义的数学观也不能被看成对于实际数学活动的真实写照，它也无法为数学的认识论问题提供满意的解释；另外，如果就整个数学进行分析的话，这种观点则暴露出了更为严重的缺陷和困难，特别是，它无从解释纯形式的数学理论为什么能在社会实践中得到成功的应用。

4. 数学真理的客观意义

由上面的讨论可以知道，我们应当在两个不同的层次上去肯定数学的客观意义：

第一，就其直接形式而言，数学命题是关于数学结构（这是世界3中的存在）的真理；

第二，就整体、过程、总和、趋势、泉源来说，数学真理又是对于客观世界量性规律性的反映，尽管这种反映是抽象的、间接的。

作为上述观念的对立面，我们首先就应反对那种完全否定数学理论现实真理性的观点；其次，我们又应注意避免把“模式真理性”绝对地等同于“现实真理性”的错误。例如，传统的经验主义事实上就体现了这样一种倾向。另外，集合论的创建者康托也曾表现出这样的错误。具体地说，康托提出了两种不同的真实性概念，即所谓的“内在真实性”与“外部真实性”。康托解释道，“内在真实性”即是指数学理论(概念）的逻辑相容性及其与先期得到建立的数学理论(概念)的和谐性；另外，“外部真实性”则是指我

们“应把数学看成是对于外在于我们智力世界的事物和关系的一种表达或描述。”康托又曾强调指出，这两种真实性事实上是一致的：一个理论（概念）如果具有内在真实性就必然具有外部真实性；从而，我们也就可以唯一地依据“内在真实性”去从事数学的创造活动。（对此可参见道本：《康托的无穷的数学和哲学》，江苏教育出版社，1989年，第61—62页。）显然，按照这样的理解，数学的“模式真理性”与“现实真理性”就被完全等同起来了，而这事实上也就是对于数学理论现实真理性的绝对肯定。

由于数学并非对于客观实在的直接反映，数学抽象的过程又必然地包含了对于真实的脱离，因此，绝对地肯定数学理论的现实真理性就是错误的。事实上，如果我们不断地由概念去引出概念，在抽象之上去进行抽象，最终就可能由于完全脱离实际而走向荒谬，这正是悖论的发现所清楚地表明了的。

在此还可从认识论的角度对悖论的问题作一简单的分析。由于悖论是一种形式矛盾，因此，悖论在数学中的出现就直接表明了存在有两种互相对立的模式；又由于数学模式在一定意义上即可看成思维运动模式的外部表现，不同的、甚至是互相对立的数学模式的存在就是无足为奇的（进而，如果单纯地为了制造悖论而把互相对立的模式凑合在一起的也就是毫无意义的）。然而，由于悖论的出现清楚地表明了有关模式的局限性，从而也就直接促进了关于新的模式的研究——在这种新的模式中，原先的矛盾将得到“消解”——因此，在所说的意义上，我们也就应当肯定悖论研究的积极意义。①

5. 关于拉卡托斯拟经验数学观的分析

由于拉卡托斯在现代数学哲学研究中所占据的重要地位，我们再来对其所倡导的拟经验数学观作一分析。

① 可参见夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第六章。

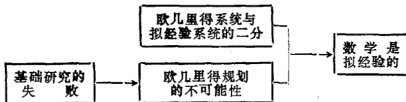
与普特南相比，拉卡托斯更为明确地强调了形式与非形式数学理论的区分，并提出了应当联系相应的非形式理论去分析形式数学理论的真理性，这些思想应当说都是十分深刻的；但是，从整体上说，他所倡导的拟经验数学观又具有严重的缺陷和错误。具体地说，除所已提及的理论上的不彻底性以外(4. 3节)，我们还应指出以下几点：

第一，我们应当注意形式与非形式数学理论的区分，并对它们的真理性作出独立的分析。但是，现代的数学研究并不是单纯地在非形式数学理论或形式数学理论的范围内进行的，恰恰相反，只有通过非形式研究与形式研究的相互转化，相互渗透，数学才能实现自己的无限发展。因此，就真理性问题的分析而言，我们就不能停留在非形式数学理论与形式数学理论的绝对对立上，而应从整体上去作出新的综合。

第二，拉卡托斯关于数学拟经验性的断言是错误的。这也就是说，数学命题并非他所说的大胆的猜想——对此只能加以证伪，而永远不可能得到证实。事实上，即如普特南所已指出的，长期的实践(或如普特南所说的"物理的经验"和"数学的经验")已经清楚地表明了数学的(客观)真理性。另外，如果数学命题始终只是大胆的猜想，数学的发展就将唯一地由猜想、"证明"、反驳等这样一些环节组成，但这显然是与数学发展的实际情况不相符合的。事实是，数学的发展的确充满了对立理论的矛盾、斗争和相互转化；但是，除去这种不连续的一面以外，数学的历史也包含有连续的一面。一般地说，数学的历史发展即是这样一种辩证的过程，其中既有证伪，也有证实；既有否证，也有积累，因此，片面地强调数学发展的不连续性，以致把它说成是"大胆猜测与戏剧性反驳的历史"就是错误的。(在第5章中我们还将对数学知识的增长问题作专门的讨论。)

最后，在拉卡托斯为自己的拟经验数学观所提供的论证中也

包含有严重的错误。具体地说，拉卡托斯的论点主要建立在所谓的欧几里得系统与拟经验系统的二分及关于欧几里得规划不可能性的论据上：由于认为数学基础研究的失败已经表明欧几里得规划是不可能成功的，因此，在拉卡托斯看来，我们就可由所说的二分直接引出数学是拟经验的结论。即



但是，上述论证是包含有严重缺陷的。事实上，拉卡托斯本人已曾指出："欧几里得主义是不可能被击败的。"(«Mathematics, Science and Epistemology», 第22页.)这也就是说，我们并不能由个别欧几里得规划的失败引出欧几里得规划是不可能的一般结论。因为，在特殊与一般之间显然存在着不可忽视的质的区别。另外，应当强调的是，所谓欧几里得系统与拟经验系统的二分更是一个严重的错误。因为，前面的分析已经清楚地表明，这里还存在有其它的可能性，特别是，数学命题就其直接形式而言即可看成"定义下的真理"（这样，我们就应当用"三分"去代替拉卡托斯所说的"二分"），从而，即使我们承认了欧几里得规划的不可能性，也不能由此而引出数学是拟经验的结论。

综上所述，拉卡托斯所倡导的拟经验数学观就不能被看成一种正确的数学哲学理论。

6. 数学研究的一般意义

最后，再结合康德及怀特海(A.Whitehead) 的有关思想对数学研究的一般意义作一分析。

如所知，康德认为数学命题是所谓的先天综合判断，即其既具有先验的理想性，又具有经验的实在性。数学的实际发展，特别

是非欧几何的建立已经清楚地表明康德关于数学命题（在此特指算术命题和几何命题）是关于时间和空间的先验的绝对真理的观点是错误的；但是，只要抛弃了其中的先验论和唯心主义的成分，康德关于思维形式（感觉形式）认识作用的分析又可看成关于数学研究一般意义的很好说明。① 具体地说，人类的认识活动总是在一定的认识框架中进行的，而数学结构则就是认识框架的一个重要组成部分：我们正是借助于这种模式来对素朴的经验事实（在此特指事物和现象的结构特性）进行整理的，从而，数学就不仅是对于客观世界量性规律性的（间接和抽象的）反映，而且也为新的认识活动提供了有力的工具。

值得指出的是，怀特海在代表其最终观点的两篇文章之一的《数学与善》中也曾从十分一般的角度对数学研究的意义进行过分析。怀特海指出："数学是对于模式的研究。"（《数学与善》，载《数学哲学译文集》，知识出版社，1986年，第346页。）怀特海在此所说的"模式"即是指（数学）实体的复杂结构——这是由其各个组成部分之间的某些关系所确定的；另外，数学家们所研究的则就是在这样的模式中有什么其它关系隐含于这些假定中。其次，怀特海指出，模式是抽象思维的产物，即是由无限（指客观实在所构成的总体）抽象出来的有限。如他所说："有限本质上涉及一个无限的背景"；"每一项知识与无限宇宙这一背景有不可分割的联系，各项知识的真实性及其意义就是由此导出的。"他又说："甚至在算术中，你们也不能不下意识地涉及无限的宇宙。你们是从总体中抽象出细节，并且对这种抽象强加上各种限制。"（同上，第347，342，343—344页。）进而，怀特海认为，模式的研究反过来又为人类的认识活动提供了必要的工具和动力。他写道："模式…是我们理解经验的一个因素。它或是具有直接的价值，或是激起追求未来价值的活动。"又，

① 对此例如可参见夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第24—34页。

“抽象涉及强调，而强调却使经验活跃起来（同上，第350—351页，353页。）显然，这事实上即是对数学研究认识论意义的充分肯定。

颇有特色的是，怀特海还曾从善与恶的角度对数学研究的认识论意义作了进一步的阐述。他指出：“一个模式本来既非善，也非恶。但是每一个模式的存在只有通过对经验的理解才能决定”，这样，“善和恶的整个课题就发生了。”（同上，第352、351页。）具体地说，怀特海所谓的“善”即是指模式研究在认识论上的积极意义，特别是指这种研究促进了对整个无限宇宙的认识；另外，也正是在同样的意义上，怀特海谈及了两种不同的“恶”：①“讨论善和恶可能要求对经验的理解具有一定的深度，而一个单薄的模式可能阻止预想的实现。于是，有一种微不足道的恶——一幅写生画竟能取代一幅完全的图画。”②“引起强烈经验的两个模式可以彼此冲突。于是，就有一种由主动的对抗所产生的、强烈的恶。”（同上，第351页。）显然，这也就清楚地说明了数学研究的局限性，及其可能产生的消极影响。①

最后，应当提及的是，怀特海曾把数学的本质特性归结为：“在从模式化的个体作抽象的过程中对模式进行研究。”（同上，第352页。）怀特海的这一思想是十分深刻的。但是，由于数学模式的构造与研究最终是为了正确地反映客观世界的量性规律性，因此，与上面的说法相比，前面所已提及的“定义”就是更为恰当的，即数学可以被描述成这样一门学科：在其中我们是通过模式的构造、并以模式为直接对象来从事客观世界量性规律性的研究的。

---

① 特殊地，依据怀特海的上述论述我们即可对（数学）悖论的实质及其不可避免性作出分析，对此可参见《西方数学哲学》，第188—190页。

第 5 章　数学知识的增长

前面已经提及，现代数学哲学研究的主要特点之一是它的开放性，特别是这种研究与一般科学哲学(以及数学史)研究的密切联系和相互渗透。例如，普特南的数学哲学理论即是其整个科学哲学理论的一个有机组成部分；另外，拉卡托斯的拟经验数学观则可看成波普尔的证伪主义科学哲学理论在数学领域中的直接推广。一般地说，现代的科学哲学研究为现代的数学哲学研究提供了直接的借鉴：数学哲学家们不仅从科学哲学中吸取了有益的观点，而且也从中吸取了有价值的研究方法和研究问题。① 由于科学知识的增长问题，包括发展的动力、发展的模式以及科学的合理性问题等，可以看成现代科学哲学研究的一个核心问题，因此，这也就为现代数学哲学中关于数学知识增长问题的研究提供了外部的动力。此外，这种研究又有着内在的必然性：如前所述，现代数学哲学研究的主要目标已不再是“告诫数学家

① 应当指出，数学哲学对于一般的科学哲学研究也具有一定的借鉴作用。例如，逻辑主义的基础研究对于逻辑实证主义一般哲学思想的影响就是一个典型的例子。对此可参见附录Ⅱ。

们应该做什么”，而是力图对实际的数学活动作出正确的分析，这样，这种关于实际数学活动的生动的研究也就必然地导致了对于数学发展的动态分析，也即关于数学发展的动力、模式及其合理性等问题的研究。

为了讨论的方便，我们将首先对数学活动以及数学发展的合理性问题作出分析；然后将集中讨论数学中有无革命的问题，后者事实上也就是关于数学发展模式的研究的一个方面。

5.1 数学活动的分析及数学发展的合理性

在这一节中我们将主要介绍基切尔关于数学活动的分析及其关于数学发展的理性主义观点。为了清楚地说明这种研究的性质，我们将首先对他的研究背景作一较为具体的介绍。

1. 库恩的范式理论

如所知，在50年代至60年代，科学哲学的研究曾围绕科学知识的增长问题形成一个高潮。犹如20至30年代的数学基础研究，这一高潮的主要标志也在于出现了“百花齐放、百家争鸣”的生动局面：提出了一些具有深远影响的理论，并围绕一些杰出人物形成了不同的学派；又由于这些学派在科学知识增长的一些基本问题上有着不同的、甚至是互相对立的观点，因此，在互相之间就展开了激烈的争论，而这反过来又极大地促进了对问题的深入研究及理论的进一步发展。具体地说，当时的主要代表人物之一即是前已提及的波普尔；另外，作为其主要对立面的则有美国科学史家、科学哲学家库恩（T. Kuhn）。尽管这两者的科学哲学理论在很多方面是大相径庭的；但是，他们又都在哲学界以及科学界产生了广泛而深远的影响。

与先前关于波普尔科学哲学理论的介绍一样，为了下面讨论的需要，我们也将首先对库恩的科学哲学理论作一简要的介绍。

第一，科学哲学的研究对象不应局限于科学理论，而应包括全部的科学活动。这也就是说，我们应当把科学看成是一种人类活动，从而其中就不仅包括有"客观"的成分，如理论、问题等，而且也包括有"主观"的成分，如科学观等。

第二，科学家是作为科学共同体的一个成员从事科学活动的，因此，在从事科学的哲学分析时，我们就应充分注意到科学研究的这一社会因素：正是科学共同体为科学家的实际研究提供了必要的工作背景。

第三，科学共同体的主要标志是其成员具有共同的范式。库恩写道："范式是一个科学共同体的成员所共有的东西，反之，一个科学共同体是由那些具有共同范式的人所组成的。"(«The Structure of Scientific Revolutions», Seocond Edition, Enlarged, 1970年, The Univer. of Chicago Press, 第176页.)作为"范式"这一概念的进一步说明，库恩曾提出了"专业质基"的概念。后者主要包括下面一些成分：① 关于特定模型的信念。如"地心说"与"日心说"的区分即是就此而言的。② 符号的一般化。即如$F=ma$这样的基本公式。③ 量值。这是指万有引力常数等一些特别重要的量值。④ 范例。这是指具体的实例，它们表明了应当怎样去从事研究。

第四，科学发展按其性质可以分为常规时期和革命时期。所谓常规时期即是指"按照范式去进行研究"，从而，常规科学研究就其性质而言即如"解决疑难"(puzzle-solving)。另外，所谓革命则是指范式的改变，也即"由旧范式向新范式的过渡"。革命的发生过程可以大致归结为："反常——危机——革命"。

第五，范式的改变就像信仰的改变或心理学中所谓的"格式塔转变"，对此只能从社会——心理学的角度去进行说明。由于新、旧范式是不可比较的："对同一情况作出不同理解的两个人，尽管

他们在讨论中使用相同的词汇，但是，它们的语义是不同的。这就是说，他们是用我所称的不可比较的观点来讲话的。因而更不用说希望他们能在谈论中互相有说服力了”(同上，第200页)，因此，科学的发展就根本无合理性可言。

从历史的角度看，库恩关于科学研究是范式指导下的活动的观点对科学哲学的研究有着重要的影响。对此可以通过与逻辑实证主义与波普尔的简单比较进行说明：犹如逻辑主义的数学基础研究，逻辑实证主义的科学哲学研究也是以科学理论内在结构的逻辑分析为主要目标的；与这种静态的研究不同，波普尔与库恩则都突出强调了科学发展的动态分析，但是，波普尔关于科学发展模式的研究仍然是以已建立的理论为主要对象进行的；而库恩则强调了科学研究是范式指导下的活动，从而认为就应从更加广泛的角度，特别是应当联系社会和心理的因素去从事科学的动态分析。(也正因为此，库恩就更为突出地强调了应当把科学哲学与科学史的研究有机地结合起来。)

2. 数学活动的分析

一般地说，基切尔关于数学活动的分析即可看成库恩的范式理论在数学领域内的推广运用。例如，基切尔写道，库恩的一个主要思想是：“我们并不能简单地通过考察一个时代的科学家所接受的命题集的变化去理解科学的历史，而应把变化的对象看成是所谓的‘科学活动’，即是一种包含有语言、理论原则、实验和理论工作的范例、认可的推理方法、解决问题的技巧、关于问题重要性的评价标准以及关于所从事活动性质的元科学观点等多种成分的‘复合体’。”基切尔并进而指出，对数学的发展我们也应持同样的观点，也即应当集中考察“数学活动”的变化，而所谓的“数学活动”则同样是一个包含有多种成分的“复合体”。(«The Nature of Mathematical Knowledge»，第 162-163页.)

具体地说，基切尔指出，数学活动包含有如下的五种成分：L

——语言；M——元数学的观点；Q——所接受的问题的集合；R——所接受的论证的集合；S——所接受的命题的集合。从而，所谓的数学活动也就可以表示成如下的五元组：〈L，M，Q，R，S〉。

基切尔对上述的五种成分及其变化形式作了如下的说明：

（1）语言。数学活动的语言成分由句法学和语义学这样两个部分组成。其中，作为对于语义学的具体说明，基切尔又强调指出，我们既可以通过明确地指出对象的特征性质，也可以通过实际地给出所指称对象的某个（些）实例去说明指称的关系——对此基切尔分别称之为"规范式的解释"和"提供范例式的解释"。

语言变化的最简单情况是简单的扩充，即如由于引进了新的词语而导致的变化——如果这种变化没有造成任何不和谐的话。另外，概念内涵的变化等则是较为复杂的情况。由实际的例子（诸如数和函数等概念的历史演变）可以看出，这种变化往往表现为由指称关系的"提供范例式的解释"向"规范式的解释"的过渡。由于这种变化并非简单的扩充，而主要是指原有成分的改变（甚至废弃），因此也就可以称为"非和谐的变化"。

（2）所接受的论证的集合。其中的最主要成分即是所谓的证明；它们是按照被认为是有效的推理形式作出的；此外，由于证明是以发现为必要前提的；而且，为了不陷于恶性循环或无穷倒退，我们则又必须不加证明地接受某些命题（公理），因此，在数学中必然地还存在有另外一些论证形式，它们并非严格的证明，但却同样地是为人们所接受的。例如，归纳与类比就是一种可能的形式；另外，由前面关于集合论及数学经验性和拟经验性的讨论我们已经知道，为了对某些公理的合理性进行说明，人们常常求助于直觉及所谓的"拟经验的考虑"（数学上的成功性）。

当然，就理论的数学研究而言，我们并不能在一般的意义上去肯定类比、归纳及直觉的有效性，而必须就各个具体的情况去

进行分析。显然，这事实上也就表明了“所接受的论证的集合”的时代特征和可变性。例如，如果某个数学家提出了某个论证，它被当时的大部分数学家认为是可接受的，这就造成了所说集合的扩张；反之，一些原来被认为是可接受的论证在后来却可能遭到拒绝，这就造成了所说集合的缩减。

（3）所接受的命题的集合。这是指为当时的数学工作者所普遍接受的数学命题的集合。由于命题是借助于（同一时代的）语言得到表述的，而且，命题的可接受性又建立在相应论证的可接受性之上，因此，语言及论证可接受性的变化就必然地导致了所接受的命题集的变化。例如，语言的扩充通常是与所接受的命题集的扩充直接相联系的；另外，概念内涵的变化则往往意味着对于某些先前为人们所接受的命题的否定。

（4）所接受的问题的集合。所谓问题的可接受性主要取决于关于问题重要性的判断；对后者则又可以作出如下的区分：即所谓的“内在的重要性”（“数学的重要性”）及“外部的重要性”（“科学的重要性”）。具体地说，前者即是指问题的解决是否有利于（数学）认识的深化；后者则是指其对于实际活动（特别是科学研究）所可能具有的工具作用。由于这种关于数学问题重要性的判断是受数学内外多种因素制约和影响的，因此，所接受的问题的集合也就具有较大的可变性。

问题集变化的最明显形式当然是单纯增加或减少的情况。例如，一个问题的解决（无论是肯定的解决或是否定的解决——前者是指获得了所希望的解答，后者则是指证明了问题的不可解性，如三等分角问题的不可解性等）就意味着这一问题不再属于这一集合；反之，新问题的提出则又为这一集合增添了新的可能成分。另外，除去单纯的增加和减少以外，在此还应考虑到问题重要性程度的变化。例如，某类问题可能由于外部条件的变化而变得十分重要；反之，某一原先被认为很有意义的问题也可能随着时间

的推移而失去了昔日的光辉。

（5）元数学的观点。所谓元数学的观点，笼统地说，即是指关于应当如何去从事数学研究的见解。其中，有些观点是较为稳定的。例如，数学家的任务通常就被认为是应当获得真的数学命题，并为之提供必要的论证以及予以适当的系统化等等。另一些成分则具有较为明显的时代特征。例如，基切尔认为，以下的几种观点是特别重要的：第一，关于证明严格性的标准；第二，关于数学范围的见解；第三，数学内部各个分支的排列顺序；第四，关于特定类型研究的重要性的判定。

基切尔并强调指出，元数学的观点常常并未得到明确的表述，而只是体现在各个时代的具体的数学活动之中；另外，这些观点虽然可能是对先前的成功实践进行反省的结果，但在更多的情况下却是通过早期的训练不自觉地形成的。由此可见，基切尔所谓的元数学观点与库恩所谓的范式是较为接近的。

最后，基切尔还曾对现代的元数学观点进行了具体分析。他指出，就上述的四个基本成分而言，现代的数学家一般持有如下的见解：第一，证明在原则上应当是可以形式化的；第二，所有的数学都可以借助于标准的集合理论（例如，ZF系统）得到表述；第三，集合论是最基本的数学分支；第四，与特殊的研究相比，一般的研究是更为重要的。基切尔认为，只须将这四个观点与先前数学家的相应观点进行比较，我们即可十分清楚地看出元数学思想的变化。（可参见«The Nature of Mathematical Knowledge»，第188—192页.）

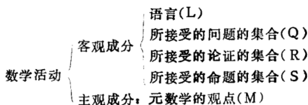
3．分析与评论

对于基切尔的上述论点可以作出如下的综合分析：

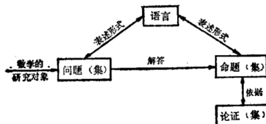
第一，在数学活动的诸元素中，元数学的观点是特别重要的。这不仅是因为关于证明严格性（以及问题重要性等）的一般观点（这是属于元数学观点的）决定了什么样的证明（及问题等）是可以

接受的，从而可以被列入所接受的论证集（及所接受的问题集等），而且是因为这一关于数学活动的分析本身即为元数学观点中最基本成分的直接反映，即数学家的工作目标是获得这样的数学命题，它们可以借助于这一时代的语言得到表述，并是那些被认为是重要的问题的解答，同时则又建立在可接受的论证之上。

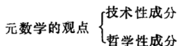
第二，依据上面的分析，对于基切尔所列举的数学活动的五个成分即可作出如下的归类：



另外，各个客观成分之间的关系则可简单表述如下：



第三，对所谓的元数学观点还可作出如下的进一步区分：



其中，所谓的“技术性成分”即是指关于证明严格性、问题重要性的一般标准；另外，“哲学性成分”则是指一般的数学哲学思想。即如数学基础的研究所已清楚地表明的，上述的两种成分既有所区别，同时又是互相联系、密切相关的。例如，直觉主义等学派关于证

明严格性、问题重要性的标准以及数学各分支排列顺序的观点就是其数学哲学思想的具体体现。也正是在这样的意义上，我们认为，基切尔关于元数学思想的分析过多地强调了其中的技术性成分，而作为元数学观点的完整分析则应赋予数学哲学思想以更多的重视。

第四，基切尔曾经提及他的关于数学活动的分析并不是完全的，但同时却又认为他所列举的各个成分是必要和充分的(可参见«The Nature of Mathematical Knowledge»，第164页)。上述关于元数学思想中技术性成分与哲学性成分的区分即已表明基切尔的分析并不是充分的。另外，应当指出的是，即使就所说的客观成分而言，基切尔所列举的各个成分也是不充分的，即应补充(或者说，应当更明确地强调)另外一些成分。例如，所接受的思维形式(的集合)就是这样一种成分。

具体地说，与关于证明严格性或问题重要性的标准相比，关于思维形式合理性(可接受性)的标准应当说是较为含糊的；但是，这样的标准无疑又是存在的。例如，是否允许由潜无限到实无限的"飞跃"，事实上就构成了所谓的"潜无限论者"(例如，直觉主义者)与"实无限论者"(例如，柏拉图主义者)的一个根本分歧。从而，就如关于论证可接受性的一般标准(这属于元数学思想)与所接受的论证集的区分一样，在此我们不仅应当明确提出作为元数学思想又一组成成分的关于思维形式可接受性的标准(这与基切尔所说的"关于特定类型研究的重要性的判定是较为接近的)，而且应当引进所接受的思维形式的集合——显然，后者即构成了数学活动的又一重要(的客观)成分。①

第五，就现代元数学思想的分析而言，我们认为，基切尔所

① 应当指出，关于思维形式合理性的分析正在逐步深入并事实上构成了数学方法论(数学启发法)研究的一个重要内容。对此可参见下面的讨论及6．3节。

列举的四个观点并不能被看成现代数学观的集中表现。事实上，由前一章的讨论我们已经知道，现代数学研究的决定性特点即在于模式这一概念在其中占据了核心的地位：在(现代)数学中，我们是通过模式的构成，并以模式为直接对象来从事客观世界量性规律性的研究的。从而，模式观的数学思想就应说是现代元数学思想的核心内容。显然，这也就更为清楚地表明了基切尔关于数学活动分析的不充分性。

最后，应当指出，其他一些学者也曾对数学活动及有关的问题进行了独立的研究。

例如，牛津大学的邓莫尔(C. Dunmore)女士在自己的博士论文《数学发展中的革命和演变》中就曾提出数学活动（她称之为“数学世界”——这是由数学共同体在某个特定时刻所一致地接受的）是由以下的六种成分组成的：① 概念；② 术语及符号；③ 定义、公理和定理；④ 证明的方法与问题的解答；⑤ 问题与猜想；⑥ 元数学的准则。

另外，曼赫顿斯（H. Mehrtons）在一篇题为《库恩的理论与数学：关于数学“新编年史”的讨论》的论文中则更为具体地讨论了如何将“专业质基”的概念应用于数学的问题。曼赫顿斯指出，数学的“专业质基”应当包括以下的成分：① 关于特定模型的信念。这是指关于数学的“形而上学”观点，即如“数学是量的科学”、形式主义及逻辑主义的数学观等。② 准则。即如我们应当如何去从事数学的研究，所获得的结果应当如何予以表述，以及关于问题和方法的评价标准等。③ 范例。这是指用以表明应当如何去从事研究的具体例子。范例应当包括基本概念、标准的问题解答、特定的术语及符号等，其本身并应具有普遍的意义。④ 概念。如函数的概念等。就其在数学研究中的作用而言，曼赫顿斯指出，这是与库恩所谓的“符号的一般化”较为接近的。⑤ 标准的问题。这是指某些在数学研究中经常遇到的问题，如分解、重

新表述、公理化及一般化等。曼赫顿斯并指出，对于数学的“专业质基”还可列举出更多的成分。(可参见«T.S Kuhn's theories and Mathematics: A discussion paper on the“New Historiography” of Mathematics»，“Historia Mathematica”,1976年,第3期，第307-312页.)

对上述的工作进行综合分析，容易看出，尽管这些学者所列举的数学活动的各个成分并不完全相同，但他们又都是以数学共同体、而不是以个别的数学家为对象进行分析的；另外，他们所列举的成分又都不仅包括了理论、方法等“客观成分”，而且也包括了元数学的思想。由此，我们也就可以更清楚地看到库恩的范式理论(更广泛地说，即是一般的科学哲学研究)对于现代数学哲学的重大影响。

由于这些方面在先前的数学哲学研究中常常是为人们所忽视的，因此，从总体上说，这些新的研究的开展就是一个具有深远意义的重要进步。

4. 数学发展的合理性

如前所述，基切尔关于数学活动的分析在很大程度上可以看成库恩的科学哲学理论在数学中的推广应用；然而，就数学发展的合理性问题而言，基切尔所采取的立场却是与库恩的非理性主义立场直接相对立的，因为，基切尔明确地主张，数学发展的合理性问题是可以历史地予以说明的，从而对数学的发展就持有理性主义的立场。一般地说，现代数学哲学中关于数学发展合理性问题的讨论可以说是更为直接地反映了库恩与波普尔科学哲学理论的一个重要分歧。因为，波普尔对科学发展持理性主义的立场，即认为对科学发展的合理性可以作出合理的解释——这事实上也就是波普尔所谓的“科学发现的逻辑”的根本依据所在(按照波普尔学派的解释，后者就是关于科学合理性的理论，也即是一组用以评价现成的、业已得到明确表述的理论的规则)；与此相反，库恩则认为范式的改变是一种神秘的转变，它完全属于(社会)心

理学的范围，不受、也不可能受理性规则的支配，从而，在科学中就根本无理性可言。

与一般科学哲学中的理性主义观点一样，基切尔关于数学发展的理性主义观点也建立在数学发展模式的具体分析之上。基切尔指出，数学发展的实际过程可能是十分复杂、各不相同的，但是，这些过程又都是由一些较为简单的基本模式组合而成的，因此，如果我们能对这些基本模式的合理性作出解释(或者说，如能给出这样的规则，借此即可判定有关的变化是否为合理的)，数学发展的合理性就在一定程度上得到了说明。

基切尔所谓的数学发展的基本模式包括问题的解决、问题的提出、系统化、严格化及一般化等五种。对于这几种模式及其合理性问题，基切尔作了如下的说明：

(1) 问题的解决。这是指通过引进某种新的论证而获得了某个(或某些)被认为是重要的数学问题的解答。由于这不仅直接导致了所接受的命题集的扩张，而且也往往造成了语言的变化，因此，如果采用前面所引进的关于数学活动的五元组的表示方法的话，这一变化模式就可表示为：

$$\langle L,M,Q,R,S\rangle \longrightarrow \langle L',M,Q',R',S'\rangle$$

基切尔认为，问题的解决这一事实本身就已清楚地表明了这一发展模式的合理性（收获的大小是与所解决问题的重要性成正比的)；但是，由于我们是以数学活动为基本单位考察数学发展的，因此，在较为复杂的情况下，我们就应通过更为深入的分析来作出综合的判断。例如，如果问题的解决建立在一种不那么严格的论证方法之上(无穷小分析就是这样的例子)，而这种方法的普遍应用则不仅造成了理解上的困难，并且可能导致错误的结论，这时我们就应对所说变化的得失进行全面的衡量；而又只有在新的数学活动所带来的(所能设想到的)“收益”大于(所能设想到的)“损失”时，这种变化才能被认为是合理的。

(2) 问题的产生。这一模式按照所说问题的产生方式又可分成以下的两类：

第一，语言扩展导致的问题产生。这是指由于在语言中引进了新的成分而导致的新的问题——这些问题即是关于这些新的语言成分的。例如，数的概念的每一次扩张其直接表现即是新的概念(词项)的引进，而又只需通过类比我们即可以这种新数为对象而提出大量的问题。例如，新数的运算是否满足已知的运算规律等。显然，这一发展模式即可表示为：

$\langle L, M, Q, R, S\rangle \longrightarrow \langle L', M, Q', R, S\rangle$

第二，所接受的命题集的扩展导致的问题产生。这是指由于获得了新的结论而导致的新问题。例如，如果所获得的是肯定的的解答，我们就立即遇到了如何将这一结果加以推广的问题（这是与下面所说的"一般化"直接相联系的）；反之，如果所获得的是否定的解答，我们则又应当考虑如何在新的、加强了的条件下去从事进一步的研究。这一发展模式可以表示为：

$\langle L, M, Q, R, S\rangle \longrightarrow \langle L, M, Q', R, S'\rangle$。

基切尔认为，上述发展模式的合理性也是十分明显的：如果新的问题具有明显的现实意义或数学意义，这种发展就是合理的。

(3) 一般化。这里所说的一般化主要是指语言的扩展，也即引进了新的更为一般的概念。基切尔指出，这一发展模式的合理性主要在于一般化的过程必然包含了对于所说对象本质特性的分离，由于这种特性在先前往往未能清楚地为人们所认识，因此，一般化的过程就直接导致了认识的深化。例如，康托的超穷数理论的建立就是一个一般化的过程，即是把数的概念由有限扩展到了无限，而又正是这种一般化的过程促使人们更清楚地认识到了数的本质特性，如有穷数与无穷数的对立，基数与序数的区分等。

(4) 严格化。这是指用较为严格的论证去取代原先的不那么

严格的论证，或是用精确定义的概念去取代先前的较为含糊的概念。由于所说的取代过程(特别是概念的取代)往往是与所接受的命题集的变化直接相联系的，因此，这一变化模式就可表述为：

$\langle L, M, Q, R, S\rangle \longrightarrow \langle L', M, Q, R', S'\rangle$。

严格化通常被认为是一种合理的发展，但是，基切尔认为，对此我们也应作具体的分析。例如，就数学基础的研究（这显然属于严格化的范围）而言，基切尔认为，这种研究并非都是合理的，而只有当基础问题的解决构成了深入开展相应的数学研究的必要前提时这种研究才是合理的——从而，如果单纯地为了解决悖论而从事数学基础研究就不能说是一种合理的发展。①

一般地说，基切尔指出，只有在不进行概念的澄清或论证的严格化就无法解决被认为是重要的数学问题时，这种追求更大的严格性的研究才能被认为是合理的。另外，由于严格化的过程也可能造成一定的"损失"，例如，原来的推理方式的否定可能意味着丧失了一个有效的方法，新的论证或语言也可能具有一定的弊病，因此，在此同样应当通过对于所说变化的得失的全面衡量，我们才能对其合理性作出正确的判断。

(5) 系统化。这是指先前被认为是不相关的成分（命题、论证、问题）的统一。这种发展的基本形式之一是公理化；另外，新的概念或新的表达方式的引进也可能起到统一的作用——对此基切尔称为是"借助于概念化而实现的系统化"。例如，一般形式的微分问题和积分问题的提出即是后一种发展的典型例子。

系统化的合理性显然在于这种发展有利于认识的深化，诸如揭示了先前被认为是互不相关的成分的联系，以及理论的整体性结构等。另外，由于系统化常常造成了元数学思想的变化，即如

① 如果采用科学哲学的术语，这也就是说，"反常"的出现并不等于"危机"。由此我们也就可以更清楚地看到库恩科学哲学思想的影响。

数学的集合论解释(这也是一个借助概念化而实现的系统化)就改变了数学家们关于数学内在次序的认识，因此，在基切尔看来，我们也就可以通过这样的途径对元数学思想变化的合理性作出说明。

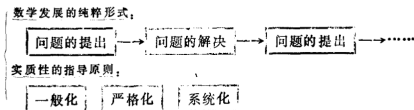
5. 进一步的分析

对于基切尔的上述论点可以综合分析如下：

第一，数学发展的合理性在数学哲学的研究中应当说是一个长期为人们所忽视的问题。之所以出现这样的情况，在很大程度上是由于数学的发展常常被认为是真理的单纯积累，也即无可怀疑的命题在数量上的单纯增长，从而其合理性似乎也就是自明的。然而，上面的分析已经清楚地表明，我们应当以包含多种成分的数学活动，而不能单纯地以所接受的命题集为对象去考察数学的历史发展；另外，数学发展的合理性其本身又只是一个相对的概念，即只能通过新旧数学活动的比较得到说明。从而，总的来说，我们就应当对数学发展的合理性及与此直接相关的数学发展的模式、动力等问题作出更为深入的研究——在笔者看来，这事实上也就是基切尔上述研究的根本意义所在。

应当指出的是，上述问题的研究不仅对于数学哲学的研究有着重要的理论意义，而且对于数学史的研究也有着重要的指导意义(又由于历史的研究无疑为当前的工作提供了必要的借鉴，因此，在这样的意义上，上述研究对于实际的数学研究也具有一定的指导意义)。事实上，数学哲学与数学史研究的紧密结合正是基切尔研究的一个重要特点(对此也可追溯到库恩)。例如，基切尔本人就曾明确指出，关于数学活动的分析及数学发展合理性的论述为数学史的具体研究提供了新的指导思想；另外，基切尔在自己著作的最后一章中也曾以很大篇幅对微积分理论的历史发展进行了具体分析，而其目的就是希望能以此来证明自己的理性主义观点的正确性。

第二，犹如前面关于数学活动诸成分的进一步分析，我们在此也可对基切尔所列举的各种发展模式作适当的归类。具体地说，问题的提出与问题的解决应当说是数学发展的纯粹形式。因为，我们在此并没有指明所涉及的问题的类型，而一切发展则又必然表现为问题的提出与解决；另外，一般化、严格化与系统化则是实质性的指导原则，因为，正是对于一般化、严格性及系统化的追求导致了相应的新的研究问题的产生（或者说，表明了什么样的研究问题[从纯粹数学的角度看]是较为重要的）。从而就有：



一般地说，一般化、严格化及系统化这三个指导性原则即是表明了什么样的研究（更准确地说，什么样的思维形式）是合理的（或者说，可能导致合理的发展）。当然，任何指导性原则都不可能保证相应研究绝对的合理性。但是，这种原则对于实际的数学研究显然又具有重要的方法论意义，从而，我们也就有必要从这样的角度去从事进一步的研究。

正是在这样的意义上，我们认为基切尔的工作可以、也应当予以进一步的发展。例如，在一般化与系统化的方向上可以提出一些更为明确的指导性法则；另外，除去所已提及的这三个原则外，我们还可补充另外一些可能的指导性法则，诸如特殊化与一般化一样在数学研究中也占有十分重要的地位。由于上述研究主要属于数学方法论的范围，因此我们将在第六章中对此作具体的讨论。事实上，由所作的讨论已经可以清楚地看出，数学方法论与关于数学发展合理性的研究是密切相关的。

第三，应当指出，基切尔关于数学发展的理性主义观点是与

他的经验主义数学观直接相联系的。具体地说，基切尔为数学的历史发展描绘了这样一幅图景：人们最先具有的是所谓的原始数学知识，它们所涉及的是具体的事物，即是关于物理对象的有关操作的（例如，聚集与分离等)。由于这些知识建立在直接经验之上，因此就是"直接可靠的"。其次，由直接可靠的数学知识出发，通过一系列的合理变化(即上述的五种发展)，逐步产生了依次相接的各个数学活动，直至现代的数学活动。由于原始数学知识是可靠的，所经历的变化又都是合理的，因此，逐步产生的数学知识也就是可靠的；又由于从历史的角度看数学可靠性的最终源泉在于实践(经验)，因此，在基切尔看来，上述分析也就清楚地表明了数学的经验性。

基切尔的论点是有一定道理的。但是，我们认为，为了说明数学的经验性(更恰当地说，是数学的现实真理性)，不仅应当从历史的角度去进行论证，而且还应从数学研究的最终目标（或者说，主要目标）进行分析。这也就如前面所已指出的，数学的经验性是从"整体、过程、总和、趋势、泉源"等方面进行综合分析的结果。另外，除去数学的经验性，我们同时又应明确地肯定数学的拟经验性，也即应当提倡和坚持数学真理的层次理论。

最后，应当指出，基切尔的上述论述事实上也包括了关于数学发展动力的分析。基切尔主要强调了来自数学内部的动力，即如对于一般化、严格性和系统化的追求等。基切尔并曾从十分一般的角度对这种来自内部的动力进行了分析。他写道："一个数学活动的各个成分之间永远不会是完全和谐的，而又正是对和谐性的追求导致了数学的发展。"(«The Nature of Mathematical Knowledge»，第 164页.)此外，基切尔也曾明确强调了外部因素的作用。例如，基切尔指出，数学概念或原理中的某些困难最初就是在把这些概念和原理应用于科学之时发现的，从而，观察和实验也就以一种间接的方式影响着数学的发展；另外，外部因素的最主要表现

则显然在于以下的事实，即在对数学问题的重要性进行判断时，我们不仅要考虑到它的数学意义，而且应当考虑到它的实际意义。

综上可见，尽管关于数学发展合理性问题的讨论在一定意义上可以看成由科学哲学的研究进行“移植”的结果，但是，这一问题确实又应当被看成现代数学哲学研究的一个重要课题。

5.2 数学中的革命

对于数学的发展可以从各种不同的角度去进行研究。除去发展的合理性问题，另一较为重要的即是数学中有无革命的问题。后一问题的研究也是以一般的科学哲学研究为直接背景的。具体地说，尽管波普尔与库恩在科学知识增长的一系列基本问题上持有直接相对立的观点，例如，库恩提出了常规科学时期与革命时期的区分，而波普尔则认为科学的发展充满了革命，从而就不存在所谓的常规时期；然而，他们又都肯定了科学革命的存在及其重要意义。显然，在这样的背景下，人们自然地会考虑到数学中是否存在有革命的问题。例如，在1974年于美国召开的科学史学会第五十届年会以及同年举行的“现代数学的进展”的讨论会上，就都进行了关于数学革命的专题讨论。

就数学哲学的深入研究而言，关于数学革命的讨论是有着重要意义的。因为，这是一种根深蒂固的观念，就是认为数学的发展是无可怀疑的真理在数量上的单纯增加；而上述问题的讨论则促使了人们去进行新的思考和研究：这不仅提供了关于数学发展及其规律性的新的见解，而且也加深了人们对于什么是数学以及什么是革命等一系列基本问题的理解。下面就从这样的角度对有

关的观点作一介绍。

1. 克伦瓦的“第十定律”

很多数学家都曾明确表达过关于数学发展的纯粹积累性的观点，并认为这是数学与其它科学的一个重要区别。例如，傅里叶(J. Fourier)在1822年这样写道：“这一困难的科学〔数学〕是逐步形成的，但它保存了所曾获得的每一原则；它在人类思维的众多变异与错误之中逐步增长并使自己不断获得加强。”另外，汉凯尔(H.Hankel)在1869年也曾写道：“在大多数科学中新的一代摧毁了上一代人所建立起来的东西……唯有在数学中每一代人在先前的建筑上添加了新的一层。”(转引自M. Crowe: «Ten “Laws” Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics»，载“Historia Mathematica”，1975年，第2期，第165页。)就这种观念的现代表述而言，美国圣玛丽亚大学的克伦瓦(M.Crowe)教授的断言则是最为简炼和直截了当的。在一篇题为《关于数学史中变化模式的十条“定律”》的论文中，克伦瓦给出了关于数学发展的十条“定律”。其中，所谓的“第十定律”即是指“数学中从来没有革命”。(同上，第165页。)

克伦瓦并曾对这一“定律”作了如下的解释：第一，克伦瓦认为，革命的最基本特征是：某个先前存在的对象(国王、宪法或理论等)被推翻并无可挽回地遭到了废弃；他并由此而提出了关于革命性的发现与构成性的发现的区分——后者是指新的创造并不伴随有对于先前理论的推翻。第二，克伦瓦认为，数学的历史发展是构成性的而不是革命性的。例如，克伦瓦指出，欧氏几何并没有为各种非欧几何所推翻，而是与后者同时存在的。第三，克伦瓦突出地强调了“数学中”这一状语，指出他的断言仅仅是就数学本身而言的；而如果就数学的术语、符号、元数学思想(例如，数学的形而上学)及方法论等进行分析的话，革命就完全是可能的。

由于克伦瓦如此明确地作出了“数学中没有革命”的断言，因

此，就引起了关于数学革命的一场讨论。这就如同吉列斯（D. Gillies）所形象地描述的："克伦瓦在这场关于数学革命的讨论中打出了第一个球"。

2．对于克伦瓦"第十定律"的驳斥

对于克伦瓦提出的"第十定律"，一些数学哲学家与数学史家表达了明确的不同意见。例如曼赫顿斯和道本(J. Dauben)就曾分别从不同的角度对"数学中没有革命"的说法进行了驳斥。

(1) 正如《库恩的理论与数学：关于数学"新编年史"的讨论》这一标题所清楚地表明的，曼赫顿斯在这一论文中所涉及的主要是能否(或者说，如何)将库恩的科学哲学理论应用于数学史研究的问题。由于"革命"正是库恩理论中的一个基本概念，因此，曼赫顿斯在这一论文中也就直接涉及到了"数学中是否存在革命"的问题。

针对克伦瓦"数学中从来没有革命"的说法，曼赫顿斯提出，任何一个具体的数学命题或理论都具有一个十分广泛的背景，即我们总是在一个特定背景下去认识各个数学命题和理论的。例如，今天的函数概念与18世纪的函数概念就是很不相同的；现今所谓的"近世代数"与19世纪的代数也有着惊人的区别。一般地说，曼赫顿斯认为，数学的内容与其术语、符号、方法论以及元数学思想是不可分割地联系在一起的，因此，我们就不可能对克伦瓦所谓的"数学中"这一限定的内涵作出明确的说明；与此相反，方法论、符号学等的变化事实上就应被看成数学中的变化，从而，对于这些方面革命性变化的确认也就是对于数学中革命的确认。另外，曼赫顿斯指出："尽管没有什么数学理论为人们所完全抛弃，但是，很多理论业已过时，或已有了如此巨大的变化以致与先前相比可以说是完全不同的，而这种变化又往往是一门学科的'内容'与'形而上学'的变化交互作用的结果。"因此，总的来说，在曼赫顿斯看来，"数学史中确实存在有可以称之为'革命'的事件"，

而这也就清楚地表明了克伦瓦关于"数学中没有革命"的断言是错误的。(参见«T. S. Kuhn's Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the "New Historiography" of Mathematics», 同前, 第 301–303 页。)

(2) 如果说曼赫顿斯对于克伦瓦的批驳主要是强调了数学活动的整体性，也即是通过"数学"这一概念内涵的分析进行的；那么，道本的论述则是从另一不同的角度进行的，即集中在"革命"这一概念的分析上。

道本在一篇题为《概念革命和数学史——知识增长的两个案例》的论文中写道："对于克伦瓦教授所采用的关于'革命'的定义自然可以提出异议。没有必要对此作出所说的限制。"具体地说，与克伦瓦关于革命即为"新的对于先前东西的推翻" 这一定义相反，道本认为，革命主要是指发生了如此巨大的变化，以致与先前表现出明显的不连续性，而且，在经历了这种变化以后，就再也不可能回覆到旧的状态。就数学而言，道本进一步指出，由于纯粹数学家们所关注的只是自己理论的相容性，而并不考虑这一理论是否正确地反映了外部的某个确定的实在，因此，数学的发展就必然是积累性的，即新的理论并没有推翻先前的理论，而只是对所已获得的结果加以补充、阐明，并使之一般化，从而获得更完备、更有力、更深刻的"问题解答"；但是，由于革命并不只是指具有"破坏性"的剧烈变革，而主要是指发展的不连续性(或者可以形容为"不同层次间的飞跃")，因此，这种关于发展积累性的断言就并不等于说数学中没有革命。(参见 «Conceptual Revolutions and the History of Mathematics—Two studies in the growth of Knowledge», 载 "Transformation and Tradition in the Sciences", ed. E. Mendelsohn, Cambridge Univer. Press, 1984年，第83–93页.)

与克伦瓦的第十"定律"直接相对立，道本明确断言：数学中确实存在有革命。例如，道本指出，古希腊关于不可公度量(线

段）的发现及康托超穷集合论的创立就是这样的实例。因为，这两个发展都造成了数学如此巨大的进步，以致完全突破了先前研究的局限性，从而造成了革命性的变化。

应当强调的是，道本所谓的变化不仅是就数学的客观成分，而且也是就数学观而言的，即如对已有的理论作出新的不同解释，研究方向的转移，以及思维方式的改变等。进而，作为数学革命的性质的具体分析，道本又突出强调了新的发展与原先的概念框架的不相容性，即这种发展是不可能在原先的概念框架中得以实现的。例如，就不可公度量的发现而言，道本指出，由于先前的毕达哥拉斯派的算术理论仅仅局限于离散数及其比，从而就无法容纳与不可公度量相对应的无理数，因此，新的发现就促使古希腊人去进行新的研究，并最终导致了由旧的算术理论到一种新的比例理论的革命性发展。道本写道："作为其直接后果，在欧多克斯以后再不会有人像毕达哥拉斯派那样去看待数学，并认为从那时起并没有什么变化了。我们也不能认为欧多克斯仅仅是在先前的相当不错的理论中添加了点什么。"（同上，第88页。）

综上所述，道本认为："革命在数学史中不仅是可能的，而且是已经发生了的。"（同上，第82页。）事实上，在道本看来，除了所已提及的两个例子外，虚数的引进，非欧几何的建立，集合论悖论的发现，以及哥德尔的不完备性定理等，也都可以被看成数学革命的实际例子。①

（3）应当指出，克伦瓦后来也曾对自己的观点作了一定的修正。在一篇题为《关于数学及其历史的十种错误观念》的论文中，克伦瓦指出，他先前提出的关于数学中从来没有革命的观点建立在

① 除去正面的论证以外，道本还曾提出了这样的思想：对于新发现的反对可以看成对于其革命性的最好度量。这也就是说，"革命既存在于新思想本身所具有的新颖性之中，同样也存在于对于业已存在的反对的克服之中。"（同上，第94页。）

这样一种观念之上，即数学命题是永远正确的(或者说，是不可证伪的)；由于他现在已经认识到这种关于数学及其历史的观念是不正确的，因此，克伦瓦事实上就在一定程度上修正了先前的关于数学革命的观点。

促使克伦瓦认识到上述错误的直接原因是拉卡托斯等人所给出的一些历史实例。例如，在《证明与反驳》这一著名论著中，拉卡托斯就曾通过笛卡儿一欧拉猜想这一案例的历史分析，清楚地表明了数学的发展并不是无可怀疑的真理在数量上的单纯增长，而是一个充满了大胆的猜想、严格的检验和反驳的复杂过程。① 这也就是说，就各个时代所接受的数学命题而言，其中也包含了大胆的猜想及错误的结论，而只是随着数学的进步这些猜想及错误才分别获得了严格的证明与纠正——显然，这事实上也就意味着对于先前所接受的某些命题的否定。

如前所述，拉卡托斯等人关于数学发展的观点构成了所谓的经验主义或拟经验主义数学观的一个重要组成部分；但是，就现在的论题而言，这里所涉及的却主要是这种对错误的纠正能否看成是真正的革命的问题。即如前面所已指出的，克伦瓦对此是持肯定态度的，他并因此在一定程度上改变了自己对于数学革命的观点；但是，也有人持有不同的看法。例如，邓莫尔就曾明确指出，拟经验主义者充分注意到了数学发展的这一事实，即数学的历史并不仅仅是由无可怀疑的真理的汇集所构成的，而是包括了许多在一段时期内并未得到发现的错误，以及对于不相容性的(有时甚至是有意识的)容忍；但是，这并不等于说对于错误定理或证明的纠正即构成了革命，因为，错误的发现与纠正很难说是一种剧烈的变化，从而，我们也就不能把放弃错误的数学结果看成数学中的革命。(«Evolution and Revolution in the development of Mathema-

① 可参见6.2节。

tics»，第81页。）由此可见，即使克伦瓦本人在一定程度上修正了原先的观点，这也并不意味着关于数学革命的讨论的终结。

3．其它的研究

上面所介绍的曼赫顿斯与道本的论述具有很强的针对性，即主要是批判克伦瓦关于数学中不存在革命的结论的；除此以外，还存在有另外一些研究，它们并不具有很强的针对性，而主要是希望对数学革命的问题作出进一步的分析。例如，邓莫尔女士在上面提到的博士论文《数学发展中的革命和演变》中就曾以较大篇幅讨论了数学革命的问题，并明确地提出了自己对这一问题的见解。

邓莫尔关于数学革命的观点在一定意义上即可看成对于克伦瓦及其反对者观点的一种综合。具体地说，即如克伦瓦认为在数学中并无革命，而革命却可能发生在术语、符号、元数学思想及方法论之中，邓莫尔也明确提出了这样的观点：数学中的革命仅限于元数学的层次，而如果就对象层次进行分析的话，就不存在革命（“推翻”或“破坏”意义上的革命）。然而，由于邓莫尔也认为数学是一种人类活动，即是一种包括了多种成分的复合体（其中既有所谓的对象成分，也有所谓的元数学成分），因此，在邓莫尔看来，由元数学中革命的存在性我们就应当进而断言数学中存在有革命，这样，就最终的结论而言，她又是与曼赫顿斯和道本相一致的。

为了论证自己观点的正确性，邓莫尔同样对数学历史上的一些重要发展进行了分析。邓莫尔认为，毕达哥拉斯学派关于不可公度线段的发现及无理数和虚数的引进，公理化方法在古希腊的确立，非欧几何及四元数的建立，分析的严格化，以及康托超穷集合论的创立等，都是这样的实例，它们标志着元数学思想的革命，但是，就对象层次而言，尽管已有的理论获得了新的意义（解释），却又都只是一种保存性的变化，即并没有发生对已有理论的

推翻。

为了更清楚地说明数学革命的性质，邓莫尔曾借用了拉卡托斯科学哲学理论中关于科学研究纲领的思想来对此进行分析：

如所知，拉卡托斯所谓的科学研究纲领即是指前后密切相关的理论系列，而其核心成分则就是所谓的纲领的硬核——这是由一个较为灵活的保护带顽强地予以保护的，以及所谓的启发法——正面启发法和反面启发法。将科学研究纲领的思想应用到数学之中，邓莫尔指出，作为科学共同体一员的数学家的研究活动即可看成是一种科学研究纲领(应当指出，对于科学研究纲领是可以从不同层次上进行分析的。例如，从大的范围看，形式主义与直觉主义即可看成两个不同的研究纲领；另外，从较小的范围看，牛顿与莱布尼兹关于微积分理论的不同研究也可看成两个不同的研究纲领)，而这种研究纲领主要地又是由他们的元数学思想所决定的，或者说，元数学思想构成了这种研究纲领的硬核中最主要的成分。从而，在邓莫尔看来，数学中的革命也就可以更为具体地表述为科学研究纲领的转变。她写道："在一个科学研究纲领得到建立时，其中就包括了由数学的元数学成分中所抽出的一组评价标准，而且同时也产生了关于新结果的一些预期。研究纲领的进行有时是十分顺利的；然而，有时却会出现未曾预料的结果，这就迫使数学共同体改变自己的观点；特殊地，如果这种改变最终导致了对于纲领硬核中一个主要成分的废弃，也即转向了另一个具有不同内核的纲领，这就是革命。这种革命的转变是由数学的元数学成分，而并非是由它的定理〔对象〕成分所造成的。"(同前，第111页。)

例如，就数的概念的历史发展而言，邓莫尔提出，这是一个历史的事实，即尽管负数与虚数的概念很早就被证明具有一定的数学意义，但是，在很长的时期内，这些概念却一直未能为大多数数学家所接受，甚至到了19世纪，也还有一些数学家对此表示

极大的怀疑与不信任。对于这一“奇怪的”现象，邓莫尔认为，这主要是因为当时的数学家具有这样一种元数学思想：数学是量的科学，而量的概念则又狭义地被理解为只是与“多少”、“大小”这样的问题有关，这样，数的概念在当时也就被认为是与计数或度量直接相联系的——由此，无理数的概念能够较快地为人们所接受就是不足为奇的了，因为，它们显然具有直接的度量意义；与此相反，负数与虚数的概念则就因为不具有明显的度量意义而被认为并非“真正的数”，并在很长的时期内遭到了大多数数学家的拒绝。显然，在这样的意义上，负数与虚数的概念最终为人们所接受也就表明了元数学思想的一次革命：先前的关于数学是“量的科学”的观点现在被认为是过于狭窄了，从而就被一种新的观点所取代，而后者最终则又导致了现代的数学观，即认为数学是关于抽象结构的研究。

另外，邓莫尔还曾对四元数的革命性质进行了分析。她指出，在哈密尔顿(W. Hamilton)创立四元数理论以前，数学家们(或者说，数学共同体)所从事的主要是这样一种数学研究纲领：他们力图把数学的研究对象由具体的数扩展到一般的表达式，并认为这些代数式的运算应当继续满足数的运算法则，如加法与乘法的交换律、结合律等。例如，英国数学家皮科克(G. Peacock)提出的“型的永恒性原理”即可看成这种元数学思想的集中表现。①正是由于这种元数学思想的影响，哈密尔顿在创立四元数理论的过程中就经历了长达15年的犹豫时期，因为，四元数的乘法并不满足交换律；但是，哈密尔顿最后终于突破了这种历史的局限性并建立了四元数理论，而这事实上也就标志着元数学思想的一个革命(数学家们因此转向了一个新的研究纲领)——但这又仅仅是元数学层次上的革命。因为，不可交换代数的建立并不意味着对于

① 可参见克莱因，《古今数学思想》，第三册，第32章。

可交换代数的废弃。(参见《Evolution and Revolution in the Development of Mathematics》,第四章。)

邓莫尔的分析是有一定道理的。但是,这里显然又存在着其它一些问题需要作进一步的研究。首先,我们应当如何去看待对象层次上的变化。对此邓莫尔也曾指出,尽管在对象层次上并不存在任何"推翻"意义上的革命;但是,这又并非是真理的单纯积累。因为,虽然旧的概念和理论并未遭到废弃,但它们的意义却可能由于元数学思想的变化而有所改变。从而,我们也就有必要对这种变化的性质作出进一步的分析。其次,我们又应对数学史上一些具有深远影响的变革作出更为具体的分析,并明确地指出这些变革的意义。例如,非欧几何的建立就是一个有待于进一步分析的例子。对此著名数学史学家克莱因曾经指出:"在19世纪所有复杂的技术创造中间,最深刻的一个,非欧几何学在技术上是最简单的。这个创造引起数学的一些重要新分支的产生,但它的最重要的影响是迫使数学家们从根本上改变对数学的性质的理解,以及对它和物质世界的关系的理解,并引出关于数学基础的许多问题,这些问题在20世纪仍然进行着争论。"(《古今数学思想》,第三册,第275页。)另外,以下的事实无疑地使得这一研究显得更为重要、更加迫切,即数学革命问题上的对立双方都曾以非欧几何的建立作为自己观点的有力论据。例如,克伦瓦写道:"欧氏几何并没有为各种非欧几何所推翻,而是与后者同时存在的";另外,道本等人则把非欧几何的建立看成数学革命的最典型例子。

就非欧几何的问题而言,笔者认为,上述的对立事实上表明了这一发展的确具有一定的双重性:在元数学层次上的革命性及在对象层次上的保守性。具体地说,前者主要是指由此而导致的几何观以及一般数学观的变化:在非欧几何建立以前,欧氏几何被认为是唯一可能的几何理论,而数学则被认为是对于现实的空间及数量关系的直接的研究;然而,由于非欧几何的建立,几何

的研究对象得到了极大的扩充，它已不仅是对于现实空间的研究，而且也是对于各种可能的空间的研究；另外，几何观的这种变化又直接导致了数学观的变化，特别是，数学理论被赋予了多重的真理性。这也就是说，先前的单一的数学真理观现在已经为数学真理的层次理论所取代了。

在此我们还可从方法论的角度对非欧几何建立的意义作一分析。按照思维形式的不同，我们可以对数学的抽象思维作出同向思维与逆向思维的区分：所谓同向思维在此是指思维在原先方向上的继续，例如，类比联想及归纳法在数学中的应用就是这样的例子；另外，所谓逆向思维则是指与原先思维相反方向上的思考，诸如数学中关于逆运算的研究等。（可参见6.3节。）显然，从这样的角度去进行分析，非欧几何的建立就可看成逆向思维的一种极端形式：在此我们不仅是在相反的方向上，而且是在直接相对立的意义上去探索新的发展可能性——对此可特称为“悖向思维”。由于悖向思维是与原先的认识直接相对立的，因此，相应的发展在最初往往就造成了一定的不和谐性（思维混乱或形式矛盾）；但是，正如非欧几何的实例所清楚地表明的，这种发展最终又常常导致了数学的重大进步，因此，我们也就应当充分肯定悖向思维的积极意义。事实上，除去非欧几何以外，四元数代数及超穷集合论的建立也可看成悖向思维的实例；另外，我们还可以各种奇异性结果的获得为例来进行说明，如处处连续而不可微的函数，在黎曼意义下可积但又具有无穷多个间断点的函数等，这些“反常”的结果都曾极大地促进了数学认识的深化和发展，即如概念的精确化、理论的严格化等（正因为此，曼赫顿斯写道：“反常在数学史中起了决定性的作用。”〔《T. S.Kuhn's Theories and Mathematics: A Discussion paper on the“New Historigraph” of Mathematics》，同前，第304页）〕；最后，悖论的发展显然也可看成自觉或不自觉地运用悖向思维的结果。

由于新的发展最终是以达到新的和谐性为主要标志的——就非欧几何的例子而言，这不仅是指对象层次上的和谐性，而且是指元数学层次上的和谐性——因此，从方法论的角度说，我们就可提出所谓的“悖向思维和谐性原则”(6.3节)；进而，非欧几何在方法论上的意义则就可以说是表明了上述原则的合理性。事实上，由实例的分析可以看出，数学史上的革命几乎无一例外地都是自觉或不自觉地运用悖向思维的结果，从而，对数学革命意义的肯定也就是对于悖向思维意义的肯定，而这也就从又一角度更清楚地表明了非欧几何建立的革命性质。

第6章　数学方法论的研究

数学方法论，笼统地说，是对于数学发展规律、数学的思想方法以及数学中发现、发明与创造等法则的研究。就其直接的论题而言，数学方法论与数学哲学的研究显然是有所区别的，但是，在两者之间又存在着一定的相互联系及互相制约的关系。例如，公理化方法的历史发展即是与数学观的历史演变直接相联系的；另外，数学基础的研究在一定意义上就可看成数学哲学与数学方法论研究的一种结合：逻辑主义等学派依据一定的数学哲学思想发展起了具体的基础研究规划，而这事实上也就包括了关于数学研究方法的明确规定和限制，如直觉主义的构造性方法、希尔伯特的元数学的研究方法等。

就数学哲学的研究而言，与数学方法论的密切结合是有其重要意义的。因为，从根本上说，数学哲学必然具有方法论的性质。也正因为此，数学方法论就可看成数学哲学的一个部分；另外，如果坚持数学哲学与数学方法论的相对区分的话，数学方法论则又可以看成联系数学哲学与实际的数学研究的一座桥梁（结合点）；只有通过后者，数学哲学才能获得必要的发展

动力和检验手段。

为了更清楚地说明问题，在此还可通过与一般科学哲学研究的简单比较来进行分析。一般地说，西方的科学哲学研究是有着与科学研究密切相联系的优良传统。如弗兰西斯·培根与波普尔等人就是这种传统的优秀代表。① 但是，就其现代发展而言，却又在一定程度上表现出了与实际的科学研究相脱离的不良倾向。例如，在一些人看来，科学哲学研究的主要课题（甚至是唯一的课题）就是为科学活动提供这样的解释，使之在这种解释下成为是合理的。应当承认，这种研究是具有一定意义的（特别是就对科学中非理性主义的反对而言）；但是，如果以其作为最主要的或唯一的主题，显然就极大地降低和缩小了科学哲学研究的意义和作用。另外，在一些科学哲学的论著中，甚至可以读到这样的论述："这里的研究是与科学家的实际工作毫无关系的。"显然，如果按照这样的道路发展下去，科学哲学就将发展成为一门与科学无关的"专门学问"，而这种"专门学问"实质上却是毫无意义的东西。（当然，这里所说的"专门化"，与对于科学哲学的专门研究或形成专门的研究队伍并不是一回事。）从而，在所说的意义上，自觉地防止和纠正与实际的科学研究相脱离的倾向就是科学哲学现代发展的一个重要和紧迫的任务，而其中的重要一环则就是应当努力加强科学方法论的研究。事实上，弗兰西斯·培根及波普尔等人之所以能在科学哲学的研究中作出重要贡献，其重要原因之一就是他们

① 也正因为此，波普尔的科学哲学理论得到了许多科学家的高度赞扬。例如，英国诺贝尔奖金获得者生物学家梅多沃说："我认为波普尔是有史以来无与伦比的最伟大的哲学家。"英国天文学家邦迪说："科学就是科学的方法，科学的方法就是波普尔所说的。"澳大利亚诺贝尔奖金获得者生理学家艾克尔斯说：科学家应该"阅读和思考波普尔关于科学哲学的著作，并作为他们科学生涯的基础。"笔者认为，对于一个从事科学哲学（不是一般哲学）研究的学者来说，这种来自科学研究第一线的直接反响是最为可贵的。

高度重视科学方法论的研究。例如,《科学发现的逻辑》与《猜想与反驳》可以认为是波普尔在科学哲学方面的最重要著作,而这两部著作无论就其标题或就其内容而言都带有明显的方法论研究的色彩。

以科学哲学的研究为借鉴，在数学哲学的研究中我们也就应当高度重视数学方法论的研究。令人高兴的是，现代的一些数学家及数学哲学家已经积极地从事了数学方法论的研究。在这一章中我们就将对这一重要的发展作出简要的介绍。

就数学方法论的现代发展而言，波利亚(G. Polya) 和拉卡托斯的研究是特别重要的。波利亚以“素朴而现代化的形式”复兴了数学启发法,从而为现代的数学方法论研究奠定了必要的基础;拉卡托斯则发展起了自己独特的数学发现的逻辑——证明和反驳的逻辑，从而使数学方法论的研究达到了新的更高水平。另外,在此我们还应特别提及我国的数学方法论研究，这不仅是因为这种研究已经获得了一些有意义的成果，从而得到了普遍的欢迎和好评，而且是因为这种研究从一开始就体现了数学工作者与哲学工作者紧密结合的特点，而这事实上正是数学方法论的研究能够得到健康发展的一个必要条件。①

下面就分别对波利亚的数学启发法，拉卡托斯的数学发现的逻辑，以及我国的数学方法论研究进行介绍和分析。

---

① 当然，在此不应排斥这样的可能性，即某些具有较高科学素养的哲学家(如波普尔)或具有较高哲学素养的科学家(如波利亚)可以在科学方法论的领域中作出重要的贡献;但是,方法论研究的特殊性质(一个好的方法论既应具有一定的具体性〔直接性〕、实践性，又应具有一定的抽象性〔间接性〕、理论性),以及由于科学的高度发展而必然导致的社会分工,显然又决定了在方法论研究中我们必须自觉地加强科学家与哲学家的联盟。

6.1 波利亚的数学启发法

1. 数学启发法研究的意义

为了清楚地了解波利亚关于数学启发法研究的意义，必须结合其特定的历史背景进行分析，而后者则又可以通过“科学方法论”这一概念不同涵义的简单比较得到说明。

按照习惯的用法或通常的理解，科学方法论即是关于科学方法的理论。其中，关于发现或发明方法的研究无疑是最重要的；另外，在更为一般的意义上，则还包括了关于科学研究的目的、科学研究的程序、科学理论的表述等问题的分析和讨论。

除去这种常规的理解外，“科学方法论”这一概念在现代的科学哲学研究中还获得了另一种更为专门的意义。例如，拉卡托斯在《科学研究纲领方法论》中写道：“现代方法论，或‘发现的逻辑’只是由一些评价现成的已经明确表达出来的理论的规则所组成的。这些规则或评价体系，还常常作为‘科学合理性的理论’、‘分界标准’或‘科学的定义’。当然，在这些规范规则的立法范围之外，有经验心理学和发现的社会学。”（《科学研究纲领方法论》，第142页。）

“科学方法论”意义的变化当然不是一件偶然的事，而是反映了相应的研究思想或研究倾向的改变。具体地说，上述的变化首先表明了对于科学发现的心理学与科学发现逻辑的明确区分；而且，按照后一种理解，科学方法论在很大程度上就被等同于科学发现的逻辑。其次，按照后一种理解，“严格意义”上的发现，即理论或假说的初始构思，属于发现心理学的范畴，因此，科学方法论所涉及的就只是检验的问题，即如何对业已得到明确表述的

理论或假说进行检验和评价，而并不涉及这些理论或假说是怎样获得的。

上述的认识又是有其特定的思想基础或背景的。从历史的角度看，这些认识即是逻辑实证主义科学哲学思想的一个重要组成部分，并是与其一般哲学思想直接相联系的。首先，按照逻辑实证主义的观点，哲学的方法就是逻辑分析的方法，从而，科学方法论也就等同于科学发现的逻辑；而且，这种关于科学发现逻辑的研究最终则又应当为一般的哲学研究服务，并事实上构成后者的一个有机组成部分。其次，与17世纪、甚至18世纪的一些哲学家（例如笛卡儿、莱布尼兹等）不同，现在的普遍观念是，并不存在那种可以用以作出科学发现（发明）的机械方法，也即所谓的"万能方法"。特殊地，逻辑实证主义者对发现的问题与检验的问题进行了明确的区分，并认为前者属于心理学的研究范围，而发现的逻辑所涉及的则仅仅是检验的问题。例如，莱欣巴赫（H.Reichenbach）就曾明确指出："发现的方面留给心理学分析，逻辑只过问检验的方面。"（«Elements of Symbolic Logic», New York: Macmillan, 1947年，第2页。）

逻辑实证主义的上述观念主要是就一般科学方法论而言的；但是，由于逻辑实证主义在西方哲学界曾长期占据主导地位，因此，这些观念对数学方法论的研究也就产生了直接的影响。事实上，这在一定程度上已经成为一种普遍的信念，即认为新理论或新思想的产生——无论就科学理论、数学理论，或是就文学思想、音乐主题而言——都属于心理学的研究范围，对此不可能作出逻辑的分析，从而，也就根本不存在任何真正意义上的发现的方法。另外，就数学而言，上述的信念则更由于逻辑主义等学派的数学哲学观得到了进一步的加强。例如，按照逻辑主义的观念，数学真理都是所谓的重言式，也即可以被化归为逻辑真理，从而在数学中就根本不存在任何真正的发现或发明。另外，如果把数学等

同于形式系统，那么，数学家的大部分工作就只是按照事先给定的法则对无意义的符号(序列)进行机械的组合和变形，而这当然也不能被看成真正的发现或创新；进而，按照形式主义的观念，形式系统的建立又完全是直觉的作用，从而，也就不可能存在任何发现的方法。

综上所述，由于一般科学哲学的影响，也由于数学哲学与数学方法论的必然联系，人们就一度形成了这样的信念，似乎在数学的领域中，除严格的逻辑演绎外，别无其它的方法可言。这样，传统意义上的发现方法的研究就陷入了困境。然而，波利亚关于数学启发法的研究却使这种情况发生了新的转折。因为，这一研究清楚地表明了数学的发现并非仅仅属于心理学的研究范围，而是一个可以进行理性分析的领域，从而就不仅造成了启发法的复兴，而且也为数学方法论的现代研究奠定了必要的理论基础。

2. 数学启发法的性质

波利亚是美籍匈牙利数学家，在分析数学、组合数学等领域中作出过重要贡献。他并曾以数十年的时间痒心研究数学方法论和数学教学。波利亚在数学方法论领域中的主要著作为《怎样解题》、《数学与合情推理》(中译本为《数学与猜想》)和《数学的发现》。这些著作对现代的数学研究和数学教学产生了十分重要和深远的影响。

《怎样解题》是波利亚在数学方法论领域内的第一部著作。波利亚在这一著作中明确地提出了自己的工作目标："本书企图用素朴而现代化的形式复兴启发法"，而他所谓"启发法"即是指关于"发现和发明的方法和规律"的研究。(《怎样解题》，科学出版社，1985年，第112页。)波利亚并曾对启发法的历史研究作了简单回顾。他指出，启发法曾有过很长的历史："在试图建立启发法体系方面最著名的是笛卡儿和莱布尼兹，……波尔查诺曾提出关于启发法的著名详细说明"；但是，这种研究"现在已经不时兴了"。(同上，第

112,Xi页。)与这种时尚相反，波利亚却希望能够复兴启发法。即如波利亚本人所指出的,《怎样解题》就是这一方向上的首次尝试,其后发表的《数学与合情推理》和《数学的发现》则可看成这一工作的继续和发展。普遍的看法是，正像波利亚所预言的那样，这些工作清楚地表明“启发法是有其未来的”。(同上,第Xi页。)

为了清楚地说明波利亚关于数学启发法研究的性质，可以首先将这一研究与笛卡儿等人的有关工作作一比较。第一，尽管波利亚是以数学的发现或发明为直接对象从事研究的，但他同时又突出强调了这种研究的普遍意义。波利亚写道:“在这种研究中,我们不应忽视任何一类问题，并且应当找出关于处理各类问题所共有的特征来；我们的目的应当是找出一般特征而与问题的主题无关。”这也就是说，数学启发法的用途“不限于任何题目。我们的问题可以是代数的或几何的，数学的或非数学的，理论的或实际的,……。”(同上,第130， 2页。)波利亚的这一思想与笛卡儿及莱布尼兹是十分接近的。事实上，后者所从事的正是一般方法论、而并非专门的数学方法论的研究。第二，笛卡儿和莱布尼兹都曾希望能找出所谓的“万能方法”,即能用以解决一切问题的有效方法。例如，笛卡儿就曾认为以下的方法是万能的：首先，把任何问题化为数学问题；其次，把任何数学问题化为一个代数问题；再次，把任何代数问题归结到去解一个方程式。但是，正如前面所已指出的，这种万能方法是不存在的，而这事实上也就是波利亚关于数学启发法研究的一个基本立场。如他所说:“不幸的是，从来就没有万能的完善的解题方法，没有能应用于一切情况的精确规则”。(《数学的发现》,内蒙人民出版社,1980年,第二卷,第135页。)第三，尽管万能的解题方法并不存在，但是，波利亚认为:“各种各样的规则还是有的，诸如行为准则、格言、指南，等等。这些都还是有用的。”(同上，第二卷，第136页。) 特别是，波利亚指出，我们可以、而且应当由已有的成功实践总结出一般的方法或模式,这种模式,

在以后类似的情况下，可以起到启发与指导的作用。(可参见《数学的发现》，第一卷，第3页。)第四，波利亚并曾强调了数学启发法的“常识性”。他写道，这里提出的方法“对于那些认真对待其问题并有某些常识的人来说是很自然的。然而按正确道路的人往往不注意用明确的语言来表达其行动，而且他可能根本不会这样做”。因此，在波利亚看来，这里的关键就在于对思维的规则进行明确的描述，从而实现由对合理方法的天才的、不自觉的应用向有意识的、自觉的应用的转化。(《怎样解题》，第3页。)正因为此，波利亚就十分欣赏波尔查诺关于启发法的以下论述："我根本不认为我在这里能够提出任何早先未曾为所有具有才华的人所察看出的研究过程，并且我也根本不想允诺你们可以从我这里发现这方面的很新颖的任何内容。但是，我将煞费苦心地用清晰的词句来说明所有有才能的人所遵循的研究规则与方法，这些有才华的人在大多数情况下，甚至不知道他们自己是遵循这些规则与方法的。虽然，即使正在做这件事的时候，我也不敢幻想我将会完全成功，但我仍然希望这里所提出的一孔之见会博得某些知音并在以后有所应用。"(同上，第57页。)

波利亚是围绕怎样解题这一中心展开数学启发法的研究的。他写道："现代启发法力求了解解题过程，特别是解题过程中典型有用的智力活动。"(同上，第130页。)波利亚并曾指出："解决问题是一项基本的人类行为。事实上，我们大部分有意识的思维都和问题有关。当我们并未沉溺于娱乐或白日作梦时，我们的思想是有方向和有目的的：我们寻找方法，我们试图解决一个问题。"(同上，第221—222页。)因此，以解题为中心展开研究也就保证了数学启发法具有最大的普遍性。另外，由于解题的过程一般地说既包括了"严格意义"上的发现，如对于可能的结论与可能的解题方法的猜测，也包括了所谓的检验，如定理的证明及猜想的检验等，而且，在实际的解题过程中这两者又往往是互相渗透、密切相关的，

因此，以解题为中心进行研究就在一定程度上摆脱了关于发现与检验严格区分的思维框架。事实上，如果就实际过程去进行分析，发现与检验的严格区分是不可能的。例如，任何较为重要的理论，由最初的提出到最终得到建立，往往经历了一个复杂的过程，其中发现与检验是相互依赖、密切相关的。如对原始猜想的检验往往导致了新的发现，即新的改进了的猜想；反之，在对一个理论进行评价时，我们则又往往必须考虑到导致这一发现的各种因素。值得指出的是，现代科学哲学中所谓的"发现之友"学派① 也就是从这样的角度对逻辑实证主义将发现与检验绝对对立起来的观点进行了批判。显然，这就更为清楚地表明了波利亚研究的普遍意义。

最后，正如波利亚本人所指出的，"我想利用我在研究工作和教学工作上的全部经验，……。"(《数学与猜想》，科学出版社，1984年，第Vii页。)在上述方面的长期实践，正是波利亚在数学方法论的研究中能作出杰出贡献的一个重要原因；与此相反，那种理论脱离实际、毫无根据地去撰造庞大的方法论体系的作法则显然是不足取的。从而，在这样的意义上，波利亚的工作也就应当成为我国方法论研究的楷模。

3．数学启发法的主要内容

数学启发法的主要内容可以概括如下：

第一，在《怎样解题》中，波利亚把解题过程归结为以下的四个阶段：① 弄清问题；② 制定计划；④ 实现计划；③ 回顾。另外，在《数学的发现》一书中，波利亚又从思维活动的形式这一角度对此作出了更为明确的描述。他指出，解题的过程是由以下的思维活动所组成的："集中目标"，"估计前景"，"对途径的寻找"、

---

① 指1978年10月美国内华达州大学纪念莱昂纳特哲学会议以来，积极主张复兴科学发现方法的劳丹、西蒙、佩拉和尼科斯等人。

"对更有希望的局面的寻找"，"对有关知识的寻找"，"重新估计形势"。

第二，数学启发法的主要内容是"定型的"问题和建议。这些问题和建议是针对上述的各个步骤提出的，其目的则是希望这些问题和建议能起到"思想指南"的作用，即给解题者以一定的启示，从而帮助他们去发现好的或正确的解题方法和解答。波利亚写道："可能任何类型的思维守则都在于掌握和恰当地运用一系列合适的提问。"(《数学的发现》，第二卷，第127页。)当然，这些问题和建议并非不费吹灰之力即可解决所有问题的灵丹妙药；但是，波利亚相信，"只要应用得当，……它们可以帮助你解决你的问题。"(《怎样解题》，第XVi页。)

对于波利亚所提出的"定型的"问题和建议可见《怎样解题》中的解题表① 及《数学的发现》的第12章。

第三，就所说的四个阶段而言，计划的制定显然是特别重要的；而又只须结合实际问题进行分析，即可看出解题过程事实上就是一系列的转化过程：或是把未知的、比较困难的问题转化为已知的、较为容易的问题以求得解决，或是通过其它问题的研究来获得材料上或方法论上的帮助。波利亚把这种为了解决原来的问题而引进的新的问题称为"辅助问题"。由此，如何引出适当的辅助问题并实现相应的转化也就可看成启发法的核心所在。对此，波利亚指出："存在着某些变化问题的模式，它们是典型有用的，例如'回到定义去'，'分解与重新组合'，'引入辅助元素'，'一般化'，'特殊化'，以及利用'类比'。"(同上，第213页。)波利亚并曾再次强调指出："没有万灵的方法来发现合适的辅助问题，正如没有万灵的方法求解一样。"(同上，第53页。)由此我们也就可以更清楚地体会到"启发法"的真正含义：这并不是一种可以用以解决

① 本书附录Ⅳ。

一切问题的万能方法，而只是希望能给解题者以有益的启示，从而帮助他们去作出独立的发现并成功地解决各自的问题。

第四，在《数学与合情推理》中波利亚曾专门讨论了合情推理的问题。波利亚所说的合情推理是指与演绎推理相对立的另一种推理形式，其主要形式即为归纳和类比。尽管合情推理并不是完全可靠的，并带有一定的主观性(因人而异)和临时性（随背景知识的变化而变化)，但是，波利亚认为，合情推理对于数学研究仍然具有十分重要的意义。因为，数学中的很多发现都是通过合情推理作出的，或者说，数学中的很多猜想即是以合情推理为依据的。正因为此，在波利亚看来，合情推理也就属于数学方法论的研究范围，而这种研究的最终目的则是希望能帮助人们去学会猜想(或者更准确地说，学会合理地猜想)。波利亚在《数学与合情推理》中还曾试图从一般的角度对归纳法的合理性作出说明，其基本作法是通过对概率作主观解释来进行论证(可参见《数学与猜想》，第十五章)。值得指出的是，波利亚的这一立场与现代科学哲学中某些归纳主义者的立场是十分一致的。另外，除对数学研究与数学教学的直接意义外，这种关于归纳法合理性的讨论对方法论的研究也具有十分重要的意义，因为，在从事数学启发法的研究时，波利亚所采取的即是归纳的方法，也即是由特例的分析引出一般的结论，从而，启发法的合理性事实上就建立在归纳法的有效性之上。

最后，与《怎样解题》中所给出的“启发法小词典”相比，《数学的发现》可以看成对于数学启发法的更为系统和深入的论述。例如，以下的发展是应当特别提及的：① 《数学的发现》中首先给出了几个较为特殊的模式：“双轨迹模式”、“笛卡儿模式”、“递归模式”和“叠加法”。这些模式在数学中都有着广泛的应用，从而其本身就有着重要的方法论意义；另外，就数学方法论的深入研究来说，特殊模式的研究则又为对数学启发法的更为一般的研究提

供了必要的基础——显然，这种处理方法本身就可看成方法论原则成功应用的典型例子。② 上面已经指出，解决问题的关键在于引出适当的辅助问题并实现相应的转化。由于所可能设想的辅助问题(进而，解题方案)显然是不唯一的，因此，我们在此就面临着如何对各种可能的方案作出正确的选择的问题。正是出于这样的考虑，波利亚在《数学的发现》中又给出了所谓的"发现的规则"(见第十三章，特别是最后的"总结")①。容易看出，与前面所提及的"定型的"问题和建议一样，这些规则也具有很大普遍性，并且是与常识完全一致的，从而，它们也就具有十分重要的意义。

自波利亚发表他在方法论领域内的第一部著作《怎样解题》以来，他的关于数学启发法的研究得到了数学家与数学教育家的高度评价，他的著作并已成为这一领域的经典著作。例如，著名数学家瓦尔登就曾指出："每个大学生、每个学者，特别是每个教师都应该读这本引人入胜的书。"然而，应当再次明确的是，波利亚的启发法的意义决不只限于数学，而是有着更为广泛的普遍意义。

4. 进一步的研究

在波利亚的直接影响下，有不少学者也积极从事了数学方法论的研究。由于数学启发法对于数学教学有着最为直接的意义，因此，一些数学教育家就在这一方向上进行了进一步的研究。对此我们将以梅森(J. Mason)为例来进行说明。

梅森是英国开放大学数学教学中心的主任。他对于数学启发法的研究可以看成对波利亚工作的直接继承和发展。例如，梅森就曾突出地强调了特殊化与一般化在数学研究中的作用。

具体地说，与波利亚相类似，梅森也是以解题为中心展开论述的，他并把解题过程划分为如下的三个阶段：进入；着手；回顾。进而，梅森又突出强调了所有这三个阶段对于特殊化与一般

① 本书附录Ⅳ。

化这样两个基本过程的依赖性。他指出，第一，只有通过特殊化我们才能很好地了解所面临的问题，即什么是已知的，什么又是所要求取的，……；第二，也只有通过特殊化，我们才能认识导致一般化的模式，并通过所说的一般化获得相应的猜想；最后，对所得到的猜想我们又必须借助进一步的特殊化去进行检验，而又只有借助新的一般化我们才能对所已获得的结果加以推广（另外，也只有从更为一般的角度去考虑问题，我们才能更好地理解所已获得的结果）。综上所述，梅森认为，数学思维事实上就可归结为："特殊化、一般化、猜测和确认。"（可参见«Thinking Mathematically», Addison-Wesley Pub. Company, 1982年；«Learning and Doing Mathematics», Milton-Keynes: Open Univer. Press, 1984年.）

此外，梅森还曾明确指出了改进数学思维的三个主要环节：① 必要的数学知识；② 必要的方法论知识；③ 必要的心理素质或情感因素。他并就后一环节进行了有意义的探索。例如，如何去提高解题者的好奇心（兴趣）、自信心和自觉性等。梅森指出，"探索、挑战与反省"的气氛对于数学思维能力的提高是最为有利的。显然，这些都是对于数学启发法的有意义的发展。

6.2 拉卡托斯的数学发现逻辑

在现代的数学方法论研究中，波利亚关于数学启发法的研究起了奠基的作用；除此以外，拉卡托斯的数学发现逻辑也占有十分重要的地位。拉卡托斯在数学方法论领域的代表性著作是《证明与反驳》。这一著作首次发表于1963年。拉卡托斯在前言中指出："应当在波利亚对于数学启发法的复兴以及波普尔的批判哲学这一特定背景下去阅读这一著作。"（英文版，第Xii页.）拉卡托斯并曾

写道："本文的目的是探讨数学方法论的某些问题"；又，"我是在类似于波利亚和贝尔纳斯的'启发法'的意义上使用'方法论'这一名词的"。(同上，第3页。)从而，在所说的意义上，拉卡托斯关于数学发现逻辑的研究就可看成对波利亚工作的继续和发展。但是，应当强调的是，拉卡托斯的数学发现逻辑又具有超出波利亚数学启发法的独立意义。这不仅是因为拉卡托斯的这一工作在一定意义上也是对于波利亚某些观点的直接否定，而且，更为重要的是，拉卡托斯的研究是对于传统数学观的有力批判。从而，我们也就应当高度重视拉卡托斯关于数学发现逻辑的研究。

1. 拉卡托斯的方法论研究的性质

为了清楚地说明拉卡托斯的方法论研究的性质及其普遍意义，我们必须首先对这种研究的两个渊源进行综合的分析——如前所述，这就是波利亚对于数学启发法的复兴及波普尔的批判哲学。

我们在第三章中已经指出，波普尔的科学哲学理论在很大程度上即是对逻辑实证主义科学理论的直接批判；然而，就科学方法论的问题而言，在两者之间却又存在着明显的共同点。首先，与逻辑实证主义者相同，波普尔主要地也是从逻辑的角度从事科学方法论研究的，并认为这种研究应当直接为一般的认识论研究服务——正因为此，在波普尔那里，科学方法论与"科学合理性的理论"、"分界标准"或"科学的定义"等就是直接相联系的。其次，从上述立场出发，波普尔同样作出了关于发现与检验的明确区分，并认为科学方法论的研究应当仅仅限于检验的范围。例如，尽管波普尔在科学哲学领域内的第一部重要著作题名为《科学发现的逻辑》，但在这一著作内他却明确地断言并不存在科学发现的逻辑。他写道："我上面说到科学家的工作在于提出理论并检验理论。在我看来，在构思或发明理论的最初阶段，既不要求逻辑的分析，也不接受逻辑分析。一个人如何产生一个新的思想——不论是音乐

主题，戏剧冲突，还是科学理论，这个问题对于经验的心理学来说，是很重要的，但是对于科学知识的逻辑分析来说，是无关的。科学知识的逻辑分析所涉及的不是事实问题，而是证明或有效的问题。……因此，我要在设想一个新思想的过程与逻辑上考查它的方法和由此得到的结果，这两者之间加以截然的区别。关于知识的逻辑，这是和认识的心理学相对的，我假定它仅在于研究在系统的检验中运用的方法，……。我对这问题的看法是，并没有什么得出新思想的逻辑方法，或者这个过程的逻辑重建。"(《科学发现的逻辑》，第5—6页。)

当然，犹如一般世界观与方法论的关系，科学观与科学方法论也是密切相关、互相制约的。由于波普尔与逻辑实证主义的科学哲学思想是直接相对立的，因此，他们所主张的科学方法论也就有着重要的区别。具体地说，就理论或假说的检验而言，逻辑实证主义突出强调了证实的问题，而波普尔由证伪主义的基本立场出发却认为严格的证实是不可能的。与此相反，在波普尔看来，重要的问题恰恰在于证伪而不是证实：这不仅是指科学与伪科学的分界标准是可证伪性而并非可证实性，而且是指科学发展的根本动力即是批判的精神，或者说，"理性的方法就是批判的方法"。

正如前面所已指出的，科学研究是一个复杂的过程，在其中发现与检验常常是密切相关、相互渗透的，因此，波普尔在此事实上就陷入了某种矛盾：他一方面断言并不存在发现的逻辑，另一方面，他所倡导的"猜想与反驳"的方法却就是一种发现的"逻辑"。对于波普尔所陷入的这种困境拉卡托斯是清楚地认识到了的，他并认为只要采取波利亚在数学方法论问题上的基本立场我们即可摆脱这种困境。这也就是说，我们应当明确地承认，尽管并不存在可以用以解决一切问题的万能方法或绝对可靠的方法，但仍然存在有科学发现的逻辑，而这就是波利亚的所谓"数学启发法"。

尽管拉卡托斯与波利亚在方法论问题上的基本立场是相同的，但是，就启发法的具体内容而言，两者却又有着完全不同的理解。另外，尽管拉卡托斯明确地反对波普尔关于不存在科学发现逻辑的断言，却又正是波普尔的批判哲学为拉卡托斯关于数学启发法的具体研究提供了必要的思想武器(正因为此，拉卡托斯写道："波普尔正是为这种发现逻辑奠定了基础的人"（《证明与反驳》，上海译文出版社，1987年，第173页）。具体地说，由于数学的特殊性质，拉卡托斯认为，我们应当充分肯定证明在数学研究中的作用，但是，拉卡托斯又认为，证明的作用并非像波利亚所说的那样"是最终表明某一表述清楚的论断是真的，否则就表明它是假的"。与此相反，拉卡托斯指出，"证明的真正目标是把原来的素朴猜想加以改进"。(同上，第44页。)另外，作为波普尔批判方法的直接作用，拉卡托斯又突出强调了猜想与反驳在数学发现中的作用，并认为归纳的方法是不可靠的。从而，总的来说，在拉卡托斯看来，"数学启发法与科学启发法很相像，倒不是因为两者都是归纳的，而是因为两者都是以猜想、证明和反驳为特征。"(同上，第86页。)

最后，应当指出的是，拉卡托斯关于证明与归纳法的上述观念不仅可以看成对于波利亚的直接批评，而且也是对于这样一种传统观念的批判，即认为数学的发展是无可怀疑的真理在数量上的单纯积累。拉卡托斯明确写道，希望自己的工作能够清楚地表明这样一点："非形式、拟经验数学的生长，靠的不是单纯地去增加无可怀疑的定理的数目，而是依靠思辨和批判、依靠证明和反驳的逻辑不断地去改进猜想。"(同上，第5页。)从而，也就应当把这看成拉卡托斯方法论研究的一个基本意义。

综上所述，正是波利亚对于启发法的复兴及波普尔的批判哲学为拉卡托斯关于数学发现逻辑的研究提供了必要的背景；但是，这又并非两者的简单综合，而是一种创造性的工作，并事实上包含了对于波利亚及波普尔某些观点的直接批判。正因为此，拉卡

托斯的研究就在一定程度上突破了前者的局限性，并标志着数学方法论的研究达到了新的更高水平。

2．数学发现逻辑的主要内容

拉卡托斯所谓的数学发现的逻辑，即证明与反驳的逻辑，也可称为证明分析法（或证明和反驳的方法）。其主要内容可以概括如下：

第一，拉卡托斯指出，我们的讨论是在"问题和猜想的阶段过去以后"开始的，从而，素朴的猜想就构成了证明分析法的实际出发点。另外，拉卡托斯所谓的证明是指对于素朴猜想的不严格的论证或思想实验，由于证明分析即是关于这种思想实验的分析，因此，在这样的意义上，我们也就可以说："证明和反驳的逻辑以最始的由思想实验紧随其后的素朴猜想为出发点。"（同上，第86页.）

拉卡托斯曾强调了素朴的猜想并非是归纳的结果，而是经由猜想与反驳得出的。他写道："素朴猜想不是归纳猜想，我们是靠试试错错，经过多次猜想、多次反驳才得到它们的。"（同上，第85页。）拉卡托斯又进一步指出，如果对事实怀有过多的归纳的敬意，就"可能妨碍知识的增长"。（同上，第86页。）从而，在拉卡托斯看来，我们就应彻底地抛弃所谓的归纳方法。

第二，证明分析法的核心思想是：我们应借助于反例对已给出的"证明"（思想实验）进行分析，并使隐蔽的前提明朗化，从而达到对原先的猜测进行改进的目的。由于证明分析法的最终目标是获得改进了的猜想，因此，这就是一种发现的逻辑；然而，这种发现又是通过证明和反驳作出的，而证明和反驳则属于检验的范畴。因此，总的来说，证明分析法的最最重要的方面就是"'发现的逻辑'与'检验的逻辑'的内在统一性。"（同上，第39页。）另外，由于反例的得出是对原来的猜想进行批判的结果，证明分析事实上则就是对于原先的不严格的论证或思想实验的批判，因此，批判的精神也就可以看成证明分析法的核心。

由对批判方法的强调就可看出波普尔的批判哲学的影响；但是，拉卡托斯的独到之处在于他依据数学的特殊性质把这种一般的批判方法发展成了较为具体的证明分析法，而后者的主要特点则就在于发现逻辑与检验逻辑的辩证统一。显然，这也就清楚地表明了在波普尔与拉卡托斯之间所存在的重要区别。

第三，就证明分析法的具体展开而言，主要的环节即是“证明”与反例（例外）的交互作用。拉卡托斯写道：“我要在证明与反例之间建立某种统一性，某种真正的相互制约。”（同上，第31页。）具体地说，拉卡托斯首先引进了如下的术语：驳倒引理（未必驳倒主要猜想）的例子称为“局部性反例”；驳倒主要猜想本身的例子则称为“全局性反例”。其次，所谓的证明分析法主要地即是就出现了全局性反例的情况而言的。拉卡托斯指出，这时我们既不应轻易地抛弃原先的猜想（“投降的方法”），或把反例视为“怪物”而置之度外（“怪物排除法”），也不应采取对原始猜想加以过度限制也即全面撤退的方法（“例外排除法”）去排除悖论，与此相反，我们应当通过“证明”分析去找出其中的症结，也即确定应对反例出现“负责”的引理——在全局性反例同时也是局部性反例的情况下，所说的引理是比较容易辨别的；在全局性反例并非局部性反例的情况下，我们则应努力去找出“隐蔽的”引理——这样，通过引入适当的前提，我们就可获得改进了的猜想。

从而，在此也就有如下的启发性规则：

规则1：如果你有一个猜想，就下功夫证明它并且反驳它。细心检查一下证明，开一份不平淡引理的清单（证明分析）；找出猜想的反例（全局反例）和可疑引理的反例（局部反例）。

规则2：如果你有一个全局反例，就放弃你的猜想，给你的证明分析添上一条会被反例驳倒的适当的引理，把放弃掉的猜想换成一个改进了的猜想，将添上的引理作为条件并入其中。不准把反例当怪物打发掉。设法把一切“隐蔽引理”都公开。

规则3：如果你有一个局部反例，就检查一下，看看它会不会也是全局反例。果真是的，你不难再应用规则2。(同上，第55页；还可参见第152—153页)。

对上述规则进行分析，容易看出，“证明”与反例的交互作用正是证明分析法的核心所在。也正因为此，拉卡托斯又提出了如下的方法论建议：“即使我们有一个猜想被反例驳倒了，不妨把反例撇在一边，先设法用思想实验来给猜想作个检验，……从而转向多证多驳法(证明分析法)”；另外，“即使一个猜想看来很合乎情理，甚至是自明的，也应当去证明一下。因为，这样也许会觉察它是依赖于很牵强附会、很成疑问的引理。反驳这些引理也许会引出对原猜想的某种意想不到的反驳。”(同上，第88、53页。)

第四，猜想的改进并不总是在原始猜想中引进必要的前提，即是对于“过强结论”的批判，也可以是对“过弱结论”的批判并引出更为一般的结论。如果就反例来进行分析，这就是指我们不仅应当善于利用全局性的反例，而且也应善于利用局部性(而非全局性的)反例。由于局部性反例所驳斥的只是某一引理(或证明过程中的某一环节)，而非主要的结论，这时就应设法用未被驳斥的引理替换被驳倒的引理以获得新的、“加宽了的”猜想。(这就是所谓的“规则4”，参见《证明与反驳》，第67页。)一般地说，拉卡托斯认为，我们不应死死停留于某一证明，而应努力去发现新的、更深刻的证明。也正因为此，拉卡托斯最终就把自己的方法称为“多证多驳法”。

第五，拉卡托斯指出，我们还可用所谓的“演绎猜测法”去引出新的更为一般的猜想，也即可以由原始猜想出发，通过演绎而引出一连串的猜想，使其“一个比一个宽，从特殊情况到了越来越一般的情况”。(同上，第112页。)(从而，也就有两种不同的猜测模式，即素朴猜测和演绎猜测——对此可参见《证明与反驳》，第85页。)

演绎猜测法可以看成消除反例的一个有效方法。因为，尽管演绎猜测并不以消除反例为直接的目标，但是，随着理论的增长，原先的反例却有可能得到解释，并事实上转化为正面的论据。(从而，就有如下的规则5：如果你有任何一个反例，就设法用演绎猜测找出一个更深刻的定理，使它们不再是它的反例。同上，第89页。)另外，应当指出的是，这种新的认识反过来又可以被用于引出对原先猜想的某种反驳(拉卡托斯称之为“启发性反例”。同上，第112页)。从而，这也就更为清楚地表明了在“证明”与反驳之间所存在的“真正的辩证统一性”。

最后，拉卡托斯在《证明与反驳》中主要是通过所谓的“笛卡儿-欧拉猜想”的历史发展进行论述的。① 拉卡托斯所希望的则不仅是由这一特例引出一般的证明分析法，而且能通过这种历史典型案例的深入分析引出数学哲学上的明确结论：数学的发展并非无可怀疑的真理在数量上的单纯积累，而是一个充满了猜想与反驳的复杂过程。从而，拉卡托斯研究的一个重要特点就是数学方法论、数学史与数学哲学的密切结合，这事实上也就为数学哲学与数学史的研究开辟了一个新的重要方向。②

综上所述，拉卡托斯的数学发现逻辑就是现代数学方法论研究中的一个十分重要的进展。

6.3 中国的数学方法论研究

数学方法论研究的开展是有其历史必然性的：随着数学科学

① 这一猜想可简单地表述为$V+F-E=2$，其中V、F、E分别代表多面体的顶点数、面数和棱数。

② 对于猜想与反驳在数学发展中积极作用的充分肯定是无可非议的；但是，如果因此而断言“一切数学命题都只是大胆的猜想”却显然是错误的。正如第三章中所已指出的，这事实上也就是拉卡托斯所提倡的拟经验数学观的根本错误所在。

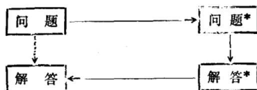
的深入发展，讲究数学研究的艺术，探索数学的发展规律、思想方法以及数学领域中发现、发明和创新的法则等已属势在必行；然而，从整体上说，数学方法论又是一门新兴的学科，在国内外都尚未形成完整的体系。因此，在这一领域中就极需开展更为深入和系统的研究。

令人高兴的是，我国的学者已在数学方法论的研究方面进行了有益的工作并取得了一些重要的成果。如所知，我国的数学方法论研究是在著名数学家徐利治教授的积极倡导下得到迅速发展的，徐利治教授并在这一领域内进行了开创性的研究工作，从而使我国的数学方法论研究达到了较高的水平并逐步形成了自己的研究特色。

下面就主要围绕徐利治教授所创立的关系映射反演方法及抽象度分析法对此进行介绍，另外，我们也将对数学直觉与数学美的问题作出独立的分析。

1. 关系映射反演方法

(1) 所谓关系映射反演方法，其实质就是指通过矛盾的转化来解决问题，也即把较复杂、困难的问题转化成较简单、容易的问题以求得解决。一般地说，在此就有所谓的"化归原则"：我们应当善于使用"由未知到已知、由难到易、由复杂到简单"的转化来解决问题；另外，利用化归原则解决问题的一般模式则可归结如下：



化归的思想与波利亚所倡导的数学启发法显然是一致的。事实上，正如前面所已指出的，解题的过程实质上即是一系列的转化过程；另外，波利亚所给出的很多启发性原则(问题与建议)也

就是关于如何去发现适当的“辅助问题”的。例如，在面临所要解决的问题时，我们就应考虑：“这是什么类型的问题？它与某个已知的问题有关吗？它像某个已知的问题吗？”特殊地，我们即可从所要追求的具体目标（未知元素、待证命题）出发去进行考虑：“这里所谓的关键事实是什么？有一个具有同样类型的未知量（特别是过去解过的问题）吗？有一个具有同样结论的定理（特别是过去证明过的定理）吗？”更为一般地说，我们则又可以考虑：“你知道一个相关的问题吗？你能设想出一个相关的问题吗？你知道或你能设想出一个同一类型的问题、一个类似的问题、一个更一般的问题、一个更特殊的问题吗？”（《数学的发现》，第二卷，第121、124页。）

一般地说，善于使用化归原则即是数学家思维的一个重要特点。例如，匈牙利著名数学家路莎·彼得（R. Peter）就曾指出，数学家思维的典型模式是：“他们往往不是对问题实行正面的攻击，而是不断地将它变形，直至把它转化成能够得到解决的问题。”（《无穷的玩艺》，南京大学出版社，1985年，第84页。）

（2）随着人类实践的发展，数学得到了不断的发展和深化，与此相应的也就有数学方法的发展和深化。特殊地，所谓的关系映射反演方法就可看成化归原则的进一步发展和深化。

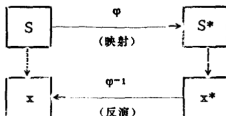
对于由化归原则到关系映射反演方法的这一发展可以作出如下的分析：

第一，关系映射反演方法的创立是应用现代的数学观，也即从更为抽象的高度进行分析的结果。

具体地说，按照现代的观点，数学的研究对象即是所谓的关系结构，从而，所谓求解某个数学问题也就可以看成如何去确定关系结构中的某一未知性态的对象。

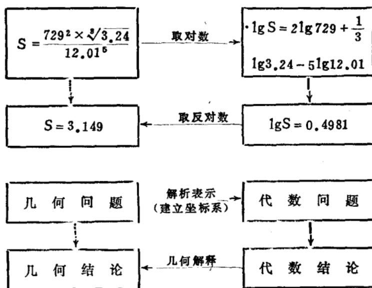
进而，从结构的观点去进行分析，所谓的（由未知到已知、由难到易、由复杂到简单的）“化归”主要地就是通过映射和反演得

以实现的。例如，几何中的射影变换，分析中的变数变换、函数变换、积分变换，以及拓扑学中的拓扑变换等，就都可以看成映射的实际例子。另外，利用关系映射反演方法解决问题的过程则可以归结如下：



其中，x可称为目标原像，x在映射之下的映像$x^*=\varphi(x)$则可称为目标映像。显然，如果目标映像x^*(的性状)可以通过一定的数学方法在映像关系结构S^*中得到确定(这时就称φ为“可定映映射”)，而且，φ又是可逆的话，我们即可由x^*出发并通过相应的逆映射(反演)φ^{-1}去求得目标原像x，这样，原来的问题就得到了解决。

第二，解析几何的研究与对数计算法可以看成关系映射反演方法的典型例子。例如，



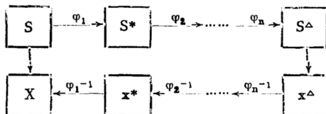
由于解析几何与对数计算法的创立即是由常量数学向变量数学时期过渡的重要标志，因此，我们也就可以看出，由一般的化归原则到关系映射反演方法的发展是与数学本身的发展直接相联系的。

(3) 由于关系映射反演方法与一般的化归原则相比，达到了新的更高的抽象程度及更大的严密性，因此，从方法论的角度看，关系映射反演方法的明确提出，就是一次重要的进步。在所已发表的专著《关系映射反演方法》(江苏教育出版社，1989年)中，我们对这一方法进行了全面的分析和论述，在此就仅限于指出以下几点：

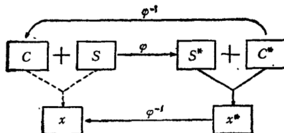
第一，应用关系映射反演方法解决问题的关键显然在于如何寻得适当的(可定映)映射 φ。《关系映射反演方法》中通过大量的实例总结出了一些常用的模式，如利用发生函数以及微分和积分作为映射工具去解决问题等。一般地说，则有如下的方法论原则：映射法的选择应当尽可能地符合以下的三条标准："一是在将原像系统转换成映像系统时，要能显示出化繁为简、化难为易或化生为熟的作用。二是要能导致定映手续和反演过程的存在性和能行性。三是映射法本身的构造要尽可能符合美学准则，即既是自然的和简单的，而且形式又是比较优美的。"(《关系映射反演方法》，第82—83页。)

第二，对于关系映射反演方法在数学中的应用可以从应用的范围或层次去进行分类。具体地说，这一方法不仅可以被用于解决诸如求取某个未知量这类具体的数学问题，也可以被用以解决涉及到理论的整体性结构这样一种具有更高"层次"的数学问题。另外，就应用的性质而言，关系映射反演方法则又不仅可以被用于得出问题的肯定性解答(即按照原先的要求去解决问题)，而且也可以被用以得出问题的否定性解答(即证明原来的问题是不可能得到解决的)。

第三，就关系映射反演方法在数学中的实际应用而言，我们往往需要用到多次的“化归”，即如：



另外，在实际的解题过程中，人们则又常常依据映像关系结构S*的分析“反过来”去对原来的关系结构S加以丰富和发展，即如引进新的条件C等：



由此可见，关系映射反演方法的应用并不是一个简单的、“单向的”、完全确定的过程，而是一个包含了多次反覆与尝试的复杂过程。

最后，在掌握了严格意义上的关系映射反演方法以后，我们又可对此作出较为一般的解释，从而使这一方法获得更为广泛的应用。在此，“概念映射”的思想及数学模型的构造是特别重要的。具体地说，所谓数学模型就是指依据或参照某种事物系统的特征或数量间的依存关系，采用纯形式化的数学语言(数学概念、数学符号、数学公式乃至数学图表等）概括地表述出来的一种数学结构；另外，在现实的事物系统与数学模型之间所存在的对应关系则就可以称为一种“概念映射”。显然，按照这样的理解，通常所谓的“数学模型方法”也就可以看成关系映射反演方法的应用实例。因为，

建立数学模型的最终目标无非就在于通过模型的分析而求得实际问题的解决，从而这也就是一种“关系—映射—定映—反演—得解”的过程。由此我们也就可以更清楚地看出关系映射反演方法所具有的普遍的重要意义。

2. 数学抽象的若干方法论原则及抽象度分析法

作为数学抽象的全面分析，应当包括定性的分析和定量的分析；另外，从方法论的角度看，我们则又可以通过思维形式的分析对数学中常用的抽象方法及其方法论原则作出概括。由于在第4章中（4.2节）我们已对数学抽象进行了定性分析，即从抽象的内容、性质和程度这样几个方面揭示了数学抽象的特殊性质，因此，在此就将仅限于指明数学抽象的若干方法论原则并对抽象度分析法作出简要的介绍。

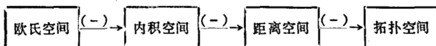
（1）这是一个基本的事实，就是不存在可用以数学创造的机械法则；但是，就思维形式而言，数学的创造活动显然又具有一定的规律性，因此，我们就可从这样的角度对数学的抽象方法进行分析，并总结出相应的方法论原则（启发性法则）。应当明确的是，第一，我们所给出的并非关于数学抽象方法的一个完整清单；与此相反，这只是一个初步的研究。第二，在所给出的各个方法论原则之间存在着对立统一的辩证关系．所有这些方法并表现出一定的层次性，因此，我们就不仅应当掌握各个具体的原则，而且应当注意培养综合分析的能力。第三，我们在此主要是就概念与模式的建构，也即所谓的创造性活动从事数学抽象方法分析的；但是，所给出的一些方法论原则同样也适用于发现性的活动，如新问题的提出，解答的猜测等。

i) 弱抽象与强抽象

正如第4章中所已提及的，弱抽象与强抽象是数学中有着广泛应用的两种思维形式。通过这两种抽象形式的具体分析，我们就可获得相应的方法论原则，即“特性分离一般化原则”和“关系

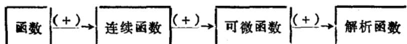
定性特征化原则”。

具体地说，所谓弱抽象即是指从原型(真实的事物和现象，或已建立的概念和模式)中选取某一特性(侧面)加以抽象，从而获得比原结构更为普遍的结构，而原结构则成为后者的特例。例如，由全等形的概念出发，通过分离出“形状相似”或“面积相等”的特性，就可分别形成较为一般的相似形和等积形的概念；另外，由欧氏空间逐步引出内积空间、距离空间和拓扑空间的过程，则是一系列弱抽象的结果，并可表示为：



由于数学对象的定义有“显定义”和“隐定义”的区分，弱抽象的具体形式也就有所不同。但是，由所举的例子可以看出，只有结构内容较为丰富的对象才能成为弱抽象的原型。另外，弱抽象的一般步骤为：首先对原型的性质作具体分析，从中分离出某个或某类特性，并用形式化的数学语言把它表述出来；然后，再以此为依据(明显地或隐蔽地)定义出更为一般的对象。这也就是所谓的“特性分离一般化原则”。

其次，所谓强抽象是指通过引入新特征强化原结构来完成抽象，从而，由此所获得的新结构就是原结构的特例。例如，通过引入“邻角相等”或“邻边相等”的特性，我们就可以平行四边形为原型而分别获得较为特殊的矩形和菱形的概念；另外，由函数的概念出发通过依次引入“连续性”、“可微性”、“解析性”等新特性而建立连续函数、可微函数及解析函数等概念的过程，则是一系列强抽象的结果，并可表示成：



强抽象的一般步骤为：首先，在一个系统的对象之间引入某

种新的关系(例如，某种映射、对应关系或运算等)；然后，在所形成的新的关系结构中把某种新出现的性质明确地规定下来，并以此为特征定义出更为特殊的对象。这也就是所谓的“关系定性特征化原则”。

ii) 同向思维及有关的方法论原则

同向思维，笼统地说，即是指思维在原先方向上的继续，它既包括了同一层次上的平行发展，也包括了由较低层次向较高层的“飞跃”。就同向思维在数学研究中的实际运用而言，我们可以总结出“结构关联对偶化原则”、“类比联想拓广性原则”等具体的方法论原则。

首先，作为平行发展的一个特例，两种数学模式互为对偶的情况是特别重要的。例如，通过引入“无穷远点”我们即可在点和直线之间建立对偶关系，并获得如下的“对偶原理”：在平面几何的任一定理中，如果把点换成直线、直线换成点，并把诸种关系换成相应的对偶关系，所得到的新命题依然成立。这样，几何中的每一定理及其对偶定理只须证明一个就够了。因为知其一即知其二。

一般地说，模式的对偶性在数学研究中有着广泛的应用。例如，在泛函分析中为了研究一个函数空间的结构，往往转而研究它的对偶空间或共轭空间；又如在博奕论中有对偶策略的研究，数学规划论中有对偶规划的研究，等等。因此，我们就可提出如下的“结构关联对偶化原则”：在数学中应善于把一对数学模式按对偶化法则联系起来，并从这样的角度去进行新的研究。

其次，类比联想及归纳的方法在数学中也有着广泛的应用。例如，以下的类比就是特别重要的：① “低维”与“高维”的类比；② 数和形的类比；③ 有限与无限的类比。应当强调的是，上述的类比在数学中不仅被用于作出新的发现。例如，提出新的问题，对可能的解答及解题方法进行猜测等。而且也被用于新的数学对

象(概念和模式)的建构。例如，在建立了三维空间的概念以后，我们就可进而建立四维、五维、……、n维乃至无限维空间的概念。其中，由三维空间到四维、五维空间的发展即是以“低维”与“高维”的类比为基础的，无限维空间的概念则建立在有限与无限的类比之上；另外，整个过程显然又是以数与形的类比为必要前提的。

为方便计，我们可以把所说的各种类比统一地归结为“类比联想拓广性原则”，这就是指在获得了各个特殊的结论以后我们应努力通过类比联想(及归纳)去拓广已有的结果。将这一原则与一般所谓的“类比联想发现法”加以比较，容易看出，尽管两者是较为接近的，但前者又包含了更为特殊的内容和意义。

最后，应当指出，就实际的数学研究而言，前面所说的弱抽象与类比联想的方法往往是互相制约，相互促进的。具体地说，如果把类比联想看成同一层次上的平行发展，由特殊到一般的发展则就是由较低层次向较高层次的飞跃。从而，与一般的认识过程一样，对于新的特殊事物的认识就往往是以一般的认识为指导的。例如，只有正确地认识了坐标空间的本质特性，我们才能由三维空间通过联想而建立四维空间的概念。另外，我们又只有通过不同事物的类比才能真正分离出作为其共同特性的一般性质，从而建立起更为一般的概念。例如，只有通过有穷数与超穷数的类比，我们才能正确地作出基数与序数的区分，并建立一般的基数和序数的概念。显然，这也就清楚地表明了培养综合分析应用能力的重要性。

iii)逆向思维及其有关的方法论原则

所谓逆向思维，在此是指与原先思维相反方向上的思考。与同向思维一样，逆向思维在数学中也有着广泛的应用。例如，逆命题的考虑就是逆向思维的一个典型例子；另外，就运算而言，则就显然是指关于逆运算的研究。

应当强调的是，所谓逆向思维是相对于原先的思维路线而言的，一旦形成了独立的研究方向，就无所谓"逆向"可言。也正因为此，为了获得有意义的成果，就还必须辅以其它的"正面的"指导性法则。例如，下述的"新元素添加完备化原则"、"公理更新和谐化原则"及"概念扩展和谐化原则"等就都是这样的实例。

首先，逆运算的考虑即是引进了一种新的运算，这时自然就应考虑原先的结构对于这种运算是否封闭的问题；而又正如减法、除法、开方及求积分等实例所清楚地表明的，为了使新的运算能够畅行无阻，我们往往必须引进新的元素，而这种扩展则又常常导致了数学的重要进步。因此，我们就可引进如下的"新元素添加完备化原则"：如果某种(新) 运算在原先的结构系统中并不是畅行无阻的，这时就可考虑引入适当的新元素以实现所说意义上的"完备性"。

其次，即如第 5 章中所已提及的，作为逆向思维的一种极端形成，又可提出悖向思维的概念：这是指背离原来的认识，并在直接相对立的意义上去探索新的发展可能性。悖向思维是与原先的认识直接相对立的，因此，相应的发展在最初往往就造成了一定的不和谐性(思维混乱或形式矛盾)；但是，又如前述的例子所清楚地表明的，这种发展最终则又常常导致了数学的重大进步，如概念的精确化、理论的严格化、新的统一性理论的建立等。由于正是对和谐性的追求促成了这种由消极结果向积极进步的转化，因此，我们也就应当以对和谐性的追求作为对于悖向思维的补充性指导法则。

具体地说，如果不和谐性是指在一个理论(特别是公理系统)中发现了矛盾(悖论)，即如集合论悖论的发现，这时就应通过基本原理或公理的适当更换以排除矛盾。这就是所谓的"公理更新和谐化原则"。另外，如果不和谐性是指两种理论的直接冲突，即如非欧几何与欧氏几何的"冲突"，这时就可通过相应概念的

扩展以消解矛盾，这就是所谓的“概念扩展和谐化原则”。

最后，应当指出，就实际的数学研究而言，同向思维与逆向思维往往是互相依赖、相互补充的。从而，这也就更为清楚地表明了诸方法论原则的整体性。

（2）所谓抽象度分析法，即是关于数学抽象的定量分析方法。对其主要内容可以介绍如下：①

第一，抽象度分析法的基本思想是：各种数学抽象物（包括概念、定理、模式、方法等）都具有一定的抽象程度，对此是可以定量地予以分析的，从而就有所谓的抽象度及其它的有关指标。

具体地说，如果定义概念B时用到了概念A，或者证明定理B时用到了定理A，就称B比A抽象，记作A⊣B。由于这里所说的抽象可以指弱抽象、强抽象或其它任何一种形式的抽象（对此我们不妨称为广义抽象），因此，对于任一给定的数学分支或理论来说，只要对其中的各个抽象物之间的顺序关系作出明确的说明，也即对“抽象”的概念作出明确的定义（这种定义通常依赖于对于理论中各个抽象物形成过程的具体考察），并假设在这种定义下所有这些抽象物构成了一个严格偏序集{M，⊣}②，我们就可依次引进以下的各个概念。

① 完全不可扩张链和抽象物的相联性。若抽象物A和B属于M且A⊣B，则称A⊣B为链，A叫作链的始点，B叫做链的末点。若给定链A⊣B和B⊣C，这两个链可以拼接成A⊣B⊣C，它就叫做前两个链的扩张链。对给定链 $P_1⊣P_2⊣\cdots⊣P_m$，若能找到另一链 $Q_1⊣Q_2⊣\cdots⊣Q_n$，使得 $Q_1=P_m$ 或 $Q_n=P_1$，则称前

---

① 详可参见徐利治、张鸿庆：《数学抽象度概念与抽象度分析法》，载《数学研究与评论》，1985年，第二期。

② {M，⊣}构成严格偏序集，当且仅当，1°，对M中的任意元素A，B，C，如果有A⊣B，B⊣C，则有A⊣C；2°，对M中的任意两个元素A和B，以下三种情况必有一种且仅有一种成立：A⊣B，或B⊣A，或在AB间并无次序关系。

一链是可扩张的。若链 $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_m$ 上再不能添加新的抽象物，即不存在形如 $P_1 \rightarrow \cdots \rightarrow P_{i-1} \rightarrow Q \rightarrow P_i \rightarrow \cdots \rightarrow P_m$的链，则称该链为完全的。若一个链既完全又不可扩张，则称这个链是“完全不可扩张的”。整个集合M即是一些“完全不可扩张链”的并集。若抽象物A与B位于同一链上，则称A与B“相联”，否则称它们“不相联”。

② 相对抽象度，设P与Q是集合M中的任意一对相联元素，如在M中有一条完全的链

(λ)：$P \rightarrow P_1 \rightarrow \cdots \rightarrow P_{r-1} \rightarrow Q$

则链（λ）的长度 r 即定义为Q关于P的相对抽象度，记作 $\deg(Q \mid P)$，如果联结P与Q的完全链有S条：(λ_1)，(λ_2)，$\cdots(\lambda_s)$，其长度分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_s$，Q关于P的相对抽象度即可规定为诸 r_i 中的最大值，即

$$\deg(Q \mid P) = \max(r_1, r_2, \cdots\cdots r_s)。$$

③ 入度和出度，偏序集$(M, \rightarrow)$中的抽象物可用点表示，关联的抽象物之间都可用有向线段联结，这样便得到一个有向图。图中的极小点即为所有完全不可扩张链的始点，可规定这些起始点的抽象度都是零，这样M中每一抽象物X（图中的点）相对于这些零抽象度元素而言就获得了确定的（最大）抽象度，记为 $\deg(X)$。另外，若P点是至少两个不同链的末点，则称P为“交汇点”；又若P是至少两个不同链的始点，则称它为“分叉点”。由于交汇点代表着$(M, \rightarrow)$中至少有两条链在那里汇聚的抽象物，故有较大的重要性；类似地，由于分叉点代表着至少可以用作两个概念出发点的抽象物，故有较大的基本性。凡从点X引出的链的条数及汇集的链的条数分别叫做该点的“出度”和“入度”，分别记作 $d^+(X)$ 和 $d^-(X)$，显然，这正是关于抽象物X的基本性和重要性的定量表现。

综上所述，按照上述步骤，对M中任一抽象物X均可计算其

抽象度deg(X)、入度 $d^-(X)$ 和出度$d^+(X)$，由此获得的三元数组$\{deg(X), d^-(X), d^+(X)\}$便叫做$X$的三元指标，记作

$$ind(X) = (deg(X), d^-(X), d^+(X))。$$

由于这三个数值分别刻画了X的深刻性、重要性和基本性，因此，三元指标就给出了一个抽象物的较为全面的信息。①

第二，给定某一数学分支的全部或部分数学抽象物的集合M，我们即可按照以下的步骤对M中的元素作全面的抽象度分析：

① 明确“抽象”的意义，将M排成偏序集，使其中每一条链都表现为不可扩张的完全链。

② 将(M，→)画成有向图，标明每一步抽象的意义(强、弱等)，必要时再标明相应的思维原则。

③ 将偏序集中的各个极小点作为始点计算各条链上的各个点的相对抽象度。

④ 计算图中每一点的入度与出度，从而获得每一点X的三元指标ind(X)。

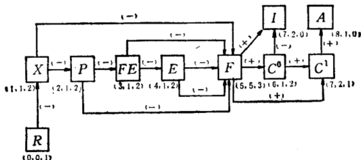
例如，如果局限于弱抽象与强抽象这两种思维形式，对数学分析中熟知的一些概念就可分析如下：

采取字母R、X等分别表示以下的各个数学抽象物：
R：常量；X：变量；P：多项式；FE：基本初等函数；E：初等函数；F：函数；C^0：连续函数；C^1：可微函数；A：解析函数；I：黎曼可积函数。
于是可以形成以下的有向图(见下页)。

显然，通过这样的分析，我们就可更清楚地了解一个数学理论的内在结构。

最后，应当强调的是，抽象度分析法不仅适用于具有丰富内

① 我们还可进一步引进“抽象难度”的概念，对此可参见《数学抽象度概念与抽象度分析法》。



涵的数学模式的分析，而且也可用于揭示一般抽象理论的内在结构。显然，这也就清楚地表明了数学方法论研究的普遍意义。

3．数学美与数学直觉

最后，再对数学美与数学直觉的问题作一分析。

（1）数学中是否包含有美的因素？对此，大部分学者的回答是肯定的。例如，古代的哲学家、数学家普洛克拉斯早就断言："哪里有数，哪里就有美。"亚里士多德也曾指出，虽然数学中没有明显地提到美，但数学与美并不是没有关系的。因为，美的主要形式就是秩序、匀称和确定性，而这些就是数学所研究的原则。现代数学家关于数学美的论述更是不计其数。如彭加莱这样写道："一个名符其实的科学家，尤其是数学家，他在他的工作中体验到和艺术家一样的印象，他的乐趣和艺术家的乐趣具有相同的性质，是同样伟大的东西"，而这种"伟大的东西"就是可以与艺术美相提并论的数学(科学)美。另外，罗素则更把数学的美形容为一种"冷而严肃的美"。他写道："数学，如果正确地看它，不但拥有真理，而且也具有至高的美，正像雕刻的美，是一种冷而严肃的美，这种美不是投合我们天性的微弱的方面，这种美没有绘画或音乐那些华丽的装饰，它可以纯净到崇高的地步，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地。"

对有关的言论进行深入分析，不难看出，当人们在谈及数学

美时，事实上包含了两种不同的涵义：一是把数学美看成美的一种基本形式，另一则是指如何依据审美直觉去从事数学的研究。

显然，按照前一种理解，我们即可通过与艺术美、自然美等的比较对数学美的性质作出进一步的分析。例如，罗素的上述引言就是这样的例子。另外，赵鑫珊在《从美学角度看数理科学》一文中也曾写道："让我们换个角度，换个着眼点，用欣赏古希腊维纳斯雕像或泰山日出的眼光去看上面那个无穷级数，你就会豁然顿悟，被那逻辑推理的优美和它具有的精神伟力，以及纯粹数学天衣无缝的精美结构，和谐简洁的无穷层次，气势磅礴的对称排列，激动得拍案叫绝、叹为观止的。……前面那个级数以及千万个其他数学公式和物理定律都具有浓郁的中国古诗的特点：淡远清空，专求意象。……所以，从美学角度看，每一个数学公式和物理定律，都是能够给人的理智以极大美感的数学诗。……这是数学家心灵和智慧再生的数学艺术美，它所造出的庄严、永恒和宏伟的意境，不是诗是什么？"（《科学·艺术·哲学断想》，三联书店，1985年，第53—55页。）张奠宙也曾写道："数学美是一种形式美，数学定理的对称、和谐和简约，思维技巧的奇异、多变和巧妙，使人们叹为观止，……如果说自然美和艺术美是由视觉、听觉等感官所接受的美感，数学美则是大脑思考所产生的思维结构上的精神美。思维上的形式美学是整个美学的重要组成部分。"（《关于数学文化的一点思考》，载《科学报》，1989年，9月9日。）

一般地说，"精确、简洁、庄严（抽象）、永恒"的确可以认为是数学美的主要特征。例如，当我们认为某物具有数学的美时，通常即是指形式的简洁性、表述的精确性、结论的普遍性等。而这事实上也就是数学对于人类文明的一个重要贡献，即极大地丰富了人们的美感。

当然，上述的讨论严格地说已经超出了数学方法论的范围；与此相反，数学中的美学方法则构成了数学方法论的重要课题。下

面就围绕后一问题作进一步的分析。

第一，对于美的追求具有重要的方法论意义。

即如第4章中所已指出的，无论就数学理论的现实真理性或形式真理性而言，主要地都是一种理性的分析，然而，非理性的因素在数学研究、特别是形式的研究中也具有十分重要的地位，而所谓的非理性因素主要地就是指直觉的判断及美学的考虑。事实上，由历史的实例即可清楚地看出，关于数学理论现实真理性或形式真理性的判断都有一个较长的过程，与此相反，美学的标准却为数学家们提供了一种即时的判断，从而，在数学研究中就有着广泛的应用。

具体地说，数学家们常常即以美学的考虑决定自己的研究方向。如阿达玛(J.Hadamard)就曾指出："科学美感，这种特殊的美感，是我们必须信任的向导"，因为，"唯有美感能够预示将来的研究成果是否会富有成果。"另外，美学的考虑，对于理论的评价也具有重要的作用。如斯思就曾指出："在数学定理的评价中，审美的标准既重于逻辑的标准，也重于实用的标准；美观和高雅对数学概念的评价来说，比是否严格正确、是否可能应用都重要得多。"①②

第二，与任何美感一样，人们对于数学的美感也带有强烈的感情色彩，而且，不同的人关于数学美的标准也是各不相同的；但是，从整体上说，数学美感又不是什么虚无飘渺、忽有忽无的东西，数学美也不是什么纯粹主观、不可捉摸的东西，而是有其确定的客观内容的。由于数学的发展(及人类文明的进步)，数学美的概念也有了一定的发展和演变，但是，它的基本内容又是相对稳定的。这就是：对称性、简单性、统一性和奇异性。

① 转引自《数学方法论入门》，浙江教育出版社，1985年，第115，91页。

② 这种"美学至上"的观点显然是不正确的，对此可参见下面的分析。

首先，对称性在原始的意义上是指组成某一事物或对象的两个部分的对等性；另外，就现代的理解而言，对称性则又广义地被理解为各个组成部分的和谐性，从而，对称美也就可以被等同于和谐美。其次，冯·诺意曼的下述言论可以看成对于简单性的最好说明："人们要求一个数学定理或数学理论，不仅能用简单和优美的方法对大量的先前彼此毫无联系的个别情况加以描述，并进行分类，而且也期望它在'建筑'结构上'优美'。在陈述这个问题时平易轻松，然后在解决它和探讨它的所有尝试中遇到巨大困难，然后再出现某种非常惊人的转折，使探讨或一部分探讨一下子容易起来，等等。同样，如果推演是冗长或复杂的话，那么就应该包含某种简单的一般原理，用以'说明'各种复杂和曲折的情况，把明显的武断化为少数几条简单的指导性的推动因素，等等。"(《数学家》，载《数学史译文集》，第123页。)再次，尽管现代数学的发展明显地表现出了多样性，一些数学家仍然突出地强调了数学的统一性。例如，希尔伯特写道："今日的数学科学是何等丰富多彩，何等范围广阔！我们面临这样的问题：数学会不会遭到像其它有些科学那样的厄运，被分割成许多孤立的分支，它们的代表人物很难互相理解，它们的关系变得更松懈了？我不相信会有这样的情况，也不希望有这样的情况。我认为，数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正是在于各个部分之间的联系。尽管数学知识千差万别，我们仍然清楚地意识到：在作为整体的数学中，使用着相同的逻辑工具，存在着概念的亲缘关系，同时，在它的不同部分之间，也有大量相似之处。我们还注意到，数学理论越是向前发展，它的结构就变得更加调和一致，并且，这门科学一向相互隔绝的分支之间也会显露出原先意想不到的关系。因此，随着数学的发展，它的有机的特性不会丧失，只会更清楚地呈现出来。"(《数学问题》，同上，第81—82页。)最后，奇异性则是指所获得的结果是如此地出人意外。由于数学中某些被认为是奇异

的结果，不仅引起了人们的惊愕和诧异，而且也激起了人们的兴趣和赞叹，因此，就如徐利治先生所说："奇异是一种美，奇异到极度更是一种美。"①

第三，依据数学美客观内容的分析，我们就可对以下的问题作出初步的解答：对于美的追求为什么能对数学的发展起到一定的促进作用？

为此，我们可以首先对数学美各个内容的相互关系作出如下的分析：① 由于对称性无非就是部分与部分之间统一性的特殊表现；又由于简单性的获得常常建立在对于统一性的认识之上（反之，统一性则又常常表现为以较简单的形式揭示出对象的内在联系），因此，在所说的意义上，对称性和简单性就都可以归结为统一性。② 由于奇异性就意味着出乎常识或预料，也即对于先前达到的统一性的破坏，因此，奇异性与统一性在一定意义上就是互相对立的；然而，就实际的数学研究而言，这两者又往往是互相依赖、相互促进的。例如，奇异性结果的获得往往导致了认识的飞跃，而这种新的认识则又意味着在更高的层次上达到新的统一。

进而，我们就可指出对于美的追求何以能促进数学的发展了：由于客观世界是统一的，而且这种统一性是一种辩证的统一，即是多样性的统一，因此，作为客观世界量性规律性的反映，数学理论在本质上也是统一的，而且，这种统一性也是一种包含了差异的统一，即是和谐与差异的统一体。从而，在这样的意义上，对于统一性和奇异性（一般地说，就是数学美）的追求实质上就是对于数学理论真理性的追求，而这最终必然地又促进了数学认识的深化与发展。

当然，作为问题的另一方面，我们又应清楚地看到在真与美之

---

① 在《数学方法论入门》中可以看到对于对称性、简单性、统一性和奇异性的追求是如何促进数学发展的实际例子。

间所存在的差异，从而就不能从纯粹美学的角度去研究数学，更不能以美学的考虑完全代替真理性问题的分析。不然的话，则就可能使数学研究走上歧途，甚至导致荒谬的结果。对于纯粹美学的研究的这种危险性，一些数学家也是再三强调了的。例如，冯·诺意曼就曾指出："当一门数学学科远离它的经验本源继续发展的时候，或者更进一步，如果它是第二代和第三代，仅仅间接地受到来自现实的思想所启发，它就会遭到严重危险的困扰。它变得越来越纯粹地美学化，越来越纯粹地'为艺术而艺术'。如果在这个领域周围是互相联系并且仍然与实践经验有密切关系的学科，或者这个学科处于具有非常卓越和发展健全的审美能力的人们的影响之下，那这种美学需要不一定是坏事。但是，仍然存在一种严重的危险，即这门学科将沿着阻力最小的途径发展，使远离水源的小溪又分散成许多无足轻重的支流，使这门学科变成大量被搞混乱的琐碎枝节和错综复杂的末事。换句话说，在距离经验本源很远很远的地方，或者在多次'抽象的'近亲繁殖之后，一门数学学科就有退化的危险。"(《数学家》，同前，第123页。)

综上所述，我们就应充分肯定美学考虑的方法论意义，但又不能以此来完全代替关于数学真理性的理性分析(毋宁说，这是一种"即时的理性")。

(2)"直觉"在数学哲学中是一个大大被"滥用"了的名词。例如，数学家们经常提及这一名词，但却没有意识到有必要对此作出进一步的说明；另外，一些数学哲学家则更以"直觉"作为解决某些理论困难的最方便的"遁辞"。从而，"直觉"事实上就是数学哲学中最需要澄清的一个概念。

我们认为，对于一般所谓的直觉可以作出如下的区分：

① 非形式与形式水平上的区分：直观与直觉。在非形式的数学研究中，由于研究对象具有明显的直观背景，因此，我们就可借助于直观、也即关于物质对象的直接认识获得相应的数学知识；

与此相反，在纯形式的数学研究中我们是完全不考虑理论所可能具有的现实意义的，从而，这里所说的直觉就不可能是关于物质对象的直接认识，也即应当与上述的直观明确地加以区分。② 构造性直觉与直觉的认识的区分。就纯形式的范围而言，对于直觉又有以下两种不同的理解：如前所述，尽管数学对象并非不依赖于思维的独立存在，而是人类思维的产物，但是，一旦数学对象得到了“构造”，则就获得了相对的独立性，进而，所谓的直觉常常也就是指对于这种数学实在的直接的认识；另外，在一些学者那里，直觉却被等同于思维的创造性活动——正是通过这种创造性活动，数学对象才得到了“构造”。例如，直觉主义就是后者的典型例子。③ 审美直觉与关于真理的洞察的区分。两者的区别显然在于：前者所直接涉及的只是数学对象的美学特征，后者则是指对于数学对象结构关系的直接的认识。

正如第 4 章中所已指出的，如果片面地强调数学概念的主观性，以致否定了数学对象由内在的“思维构造”向外部的“独立”存在的转化的可能性，最终就必然导致荒谬的结论；与此相反，我们必须肯定数学对象的逻辑构造性。从而，在数学直觉的进一步分析中我们就应以直觉的认识为主要的对象。另外，由于在前面已对审美直觉的问题进行了专门的讨论，因此，下面的讨论就将集中在对于数学真理的直觉的认识上。

对于数学直觉的性质可以作出如下的分析：

非逻辑性是直觉的基本特性。例如，彭加莱曾经指出：“搞算术，就如搞几何，或搞任何别的科学，需要某种与纯逻辑不同的东西。为了表述这个某种东西，我们没有更好的字眼，只能用‘直觉’一词。”这就是说，直觉是“从事科学发现所需要的与纯逻辑不同的某种东西。”依据所说的“非逻辑性”，我们并可对数学直觉的性质进一步论述如下：

第一，直接性。由于直觉是一种非逻辑的领域或洞察，因此，

与普通的逻辑推理过程相比，直觉的认识就更为直接，即其中往往包含有飞跃和突变。这也就如彭加莱所说，为直觉所指引的数学家不是以步步为营的方式前进的，"他们往往在第一次出击中就迅速达到了征服的目的。"第二，"可信性"。尽管直觉并非建立在严格的逻辑论证之上，但同时却又往往伴有很强的"自信心"。这就如同波利亚所描述的那样："一个突然产生的、展示了惊人的(处于戏剧性的重新排列之中)新因素的想法，具有一种令人难忘的重要气氛，并给人以强烈的信念。这种信念常常表现为诸如'现在我有啦！''我求出来了！''原来是这一招！'等惊叹。"(《数学的发现》，第二卷，第90页。)一般地说，这也就是直觉的认识与一般的猜想的主要区别所在。第三，自发性。这首先是指直觉的发生常常具有突然性和偶然性；其次，直觉的认识又常常表现为无意识的思维活动。从而，总的来说，直觉的认识就是不可预期和不可解释的。例如，高斯曾经提及，他曾以数年的时间企图证明一个算术定理而未能获得成功；"最后，我获得了成功，但并非由于艰苦的努力，而是由于上帝的恩惠，就像一道忽然出现的闪光，疑团一下子被解开了，连我自己也无法说清在先前已经了解的东西与使我获得成功的东西之间是怎样联系起来的。"第四，综合性和形象性。与逻辑推理的抽象性相反，直觉常常与形象思维相联系，即表现为某种综合性的心智的图像：它在细节上是模糊的，但在整体上却是确定的。例如，阿达玛就曾强调了形象思维对于理解数学证明的重要性。他写道：借助于它，"我就可以一下子看到论证中的所有成分，把它们相互联结起来，并使之成为一个整体——一句话，达到综合的目的。"一般地说，"每一个数学研究都迫使我建立这样一个图式，它们总具有、也必须具有模糊性的特点，但又并非不可靠的。"①

最后，再对数学直觉的合理性问题作一分析。

第一，人们之可能具有关于数学对象的直觉是无足为奇的，因

为，前面的分析已经表明，数学对象本身就是思维的产物，从而，对于数学对象的认识就必然地包含了一个在思维中实际地“构造”起有关对象的过程（即是使借助于语言“外化”了的对象重新转化为思维的内在成分），显然，思维中所实际形成的未必是抽象的逻辑演绎的系统，而也可能是一种整体性的直观形象，进而，对于这种数学对象的认识又未必是理性分析的结果，而也可能是一种直接的洞察，甚至还可能包括了无意识的思维活动。总之，所谓的数学直觉事实上就是一种“内省的经验”（“心理经验”），而人们之所以具有这种直觉则就是思维能动性的一种表现。第二，正由于数学直觉是思维能动性的一种表现，又由于长期的实践已经证明了这种认识活动在整体上的合理性，也即存在于主观认识与客观实在之间的最高的统一性，因此，我们也就应当充分肯定数学直觉的合理性及其积极意义。当然，作为问题的另一方面，我们又应清楚地看到直觉的局限性，更不能以此去完全取代理性（逻辑）的分析。事实上，长期的实践也已清楚地表明了直觉的易谬性，逻辑在数学认识活动中的重要地位则更是一个公认的事实。

综上所述，直觉与逻辑就是数学认识活动的双翼，它们相互补充、互相作用，都是数学研究活动的必要手段。从而，我们就既应加强逻辑思维的训练，努力提高抽象思维的能力，又应注意培养数学直觉能力，培养对于数学美的鉴赏能力。

---

① 上述几段引言均转摘自《数学方法论入门》。

附录Ⅰ 关于拉卡托斯的数学哲学思想及其它有关问题的一组文章

【注】 吉利斯(D·Gillies)和沃勒尔(J.Worrall)是拉卡托斯生前的学生和合作者，现分别任教于伦敦大学国王学院和伦敦经济政治学院，《发展经验论的数学哲学的一个尝试》及《拉卡托斯的数学哲学和科学哲学》是吉利斯与沃勒尔分别应笔者之邀专门写成的，其中对拉卡托斯的数学哲学思想及其它有关的问题进行了论述；另外，豪森(C. Howson)是拉卡托斯生前的学术助手，他的论文《非经验科学中的方法论》讨论了能否把科学研究纲领方法论的思想推广应用于数学领域的问题。

一、发展经验论的数学哲学的一个尝试

D. 吉利斯

拉卡托斯为自己在1967年完成的、但只是到了1976年才得到发表的一篇论文起了这样一个标题:《经验主义在现代数学哲学中的复兴?》拉卡托斯本人对所说的"复兴"持同情的态度，但在这一方向上并未走得如此之远以致采取了彻底的经验论的数学哲学。他的观点为(参见〔1976〕，第30页)：数学是拟经验的。拉卡托斯的意思是指，对于像公理化集合论那样的高层次的数学理论，可以通过检查它们在如数论那样低层次的数学理论中的结论加以检验。这一过程与通过观察对普通的科学理论进行检验是相类似的。

两者的区别在于：在数学的情况，另一类基本命题取代了观察命题。从而，数学的情况就既类似于、但又不同于科学的情况，而这也就表明了使用“拟经验的”这一名称的合理性。

在拉卡托斯更早的1963—1964年和较为著名的著作《证明与反驳》中可以看到大致相同的观点。事实上，拉卡托斯在序言中（〔1963—64〕，第5页）提到了“非形式的、拟经验的数学”，并声称这种数学是依照“证明与反驳”的逻辑增长的。拉卡托斯在当时是赞同波普尔关于科学是依照猜想与反驳的逻辑增长的观点的，他并认为非形式的数学是以相类似、但又并非完全相同的方式增长的。拉卡托斯所给出的关于所有多面体都有$V-E+F=2$的猜想的第一个反驳就是两个套在一起的立方体。拉卡托斯指出，这一反例是通过观察结晶体而发现的。他在附注1（〔1963-64〕，第13页）中写道：“吕里埃和赫塞尔都是由矿物采集领路才得出他们的发现的，当时他们察觉到这样一些双晶体，在内的晶体是不透明的，在外的晶体则是透明的。吕里埃明文感谢他的朋友皮克泰特教授的晶体采集对他有启示。赫塞尔则提到了包在透明的氟化钙晶体里的硫化铅立方体。”当然，拉卡托斯在此并不是指$V-F+F=2$是由观察所直接驳斥的。观察导致了由两个套在一起的立方体组成的数学实例，而这一数学实例则构成了反例。从而，数学就是拟经验的而并非经验的。

我在读大学时读到了《证明与反驳》，结果是在1966年的秋季我成了拉卡托斯的博士研究生。我原来打算遵循《证明与反驳》的路子写一篇数学哲学的论文；然而，在我遇到拉卡托斯时，他正对概率理论产生了兴趣，并在着手准备他的论文（1968）：《归纳逻辑的问题的变化》，那时波普尔仍然是伦敦经济政治学院哲学系的主任，自然也就有很大的影响。波普尔在此前不久提出，应当用一个同样处于客观主义传统之下的更为充分的理论去取代冯·米塞斯（Von Mises）关于概率的频率理论。

上述原因使我对概率与统计学的基础问题产生了兴趣。我以此为题完成了博士论文，这一论文经修改后以著作的形式(Gillies〔1973〕)得到了发表。在这一著作中我支持冯·米塞斯关于概率理论是与理论力学同样的特殊科学的观点；但是，我不再像冯·米塞斯那样用可观察频率操作地去定义概率，而是采用了波普尔的一个思想，建议用概率命题的证伪规则去建立概率与频率之间的联系。我证明了这一方法是与统计检验的理论，特别是与费谢尔(R. Fisher)的工作相一致的。

就在我的著作发表后不久，我们十分悲痛地获悉拉卡托斯于1974年2月2日去世，年方52岁。自1968年至逝世，拉卡托斯发展起了他的科学研究纲领方法论。逝世前拉卡托斯正计划把这一关于科学方法的新观点应用到他的拟经验的数学哲学上；他的早逝意味着这一工作只能由包括我在内的他的学生们予以继续。

在拉卡托斯逝世后的这些年中，我逐渐发展起了这样一种观点，即认为应由拟经验的数学观过渡到一种彻底的经验论数学哲学，后者在某些方面是与19世纪穆勒的立场相类似的。多年来，穆勒关于数学的观点一直被认为已经为弗雷格所彻底驳倒了；然而，通过对弗雷格与穆勒之间的争论进行回顾，我认为可以针对弗雷格的批评为穆勒进行辩护(可参见Gillies〔1982〕，第三章、第四章)。这并不是说，我将按其原来的形式为穆勒的经验论数学哲学辩护。关于数学的改进了的经验主义观点是这样的：数学知识即是由经验所确证的数学信念。这种经验的确证可以采取多种形式。例如，就像微积分构成了牛顿力学的一个组成部分，一个数学理论可以表现为一个科学理论的一个成分，从而，如果这一科学理论作为一个整体由观察和实验得到了确证，这也就是对于理论的数学成分的确证。另外，数学理论也可能在实际中得到应用，如果这种应用是成功的，相应的数学理论也就得到了确证。例如，十进位制的算术法则就由于在现代欧洲早期发展的会计事务中的成

功应用得到了确证。由此，与拟经验论相反，数学理论看来就与一般科学理论一样也是由观察、实验以及在实际中的成功应用得到确证的。

这种经验论的数学哲学在一定意义上即是我在〔1973〕中所给出的关于概率论解释的一种推广。我在那里论证道，即如冯·米塞斯所说，概率论是与理论力学同样的一门科学；我现在则是希望把这一观点推广到数学的其它分支，如算术、几何、实分析等。

当然，对这种经验的数学观有很多可能的反对意见。让我们先来看与诸如数这样的数学对象的性质有关的一个困难。一门典型的科学，诸如动物学，它的研究对象（动物）显然是物质的自然世界（我们把人类也包括在内）的一个部分，然而，算术的对象（数）却似乎具有影子般（如果不是鬼魂般）的性质，从而很难被看成物质世界的一个部分，那么，算术又怎么可能是与其它科学一样的一门自然科学呢？

为了解决上述问题，我们先来看那种可以被称为"能动的"一方的观点。按照这种观点，数，或者更恰当地说，数的概念，被看成人类的产物。布劳维尔认为，数是数学家主观的心智构造。这一观点是必须加以拒绝的，因为它未能正确地反映数学是一种社会活动的事实；然而，波普尔却通过声称数与其它数学对象是数学共同体的社会产物（波普尔〔1972〕，第三章、第四章）发展了布劳维尔的观点。我曾建议把波普尔的这一观点称为"构造的柏拉图主义"（Gillies，〔1982〕，第六章）。就断言数学对象，例如数，是一种客观的存在而言，这是与柏拉图主义一致的，然而，把数学对象说成是一种随着人类社会与文明的发展而不断演变的人类构造，而并非超时间的、永无变化的存在，这又是与柏拉图主义不同的地方。但是，如果数真正是一种人类构造，这种构造又是如何得以实现的呢？在我的〔1985〕中，我试图通过两个类比来对此

进行说明，即数与词的意义及钱的对比。词的意义和钱都是抽象的东西而并非物理的对象；但是，它们又显然是存在的（谁会否认钱的存在性？），并显然是人类的构造。由维特根斯坦的语言理论出发，我认为词的意义是通过符号在规则指导下的社会实践中的用法的建立得到创造的。类似地，钱是通过在经济生活中建立为社会所接受的某些筹码的用法得到创造的。数也并非柏拉图世界中的超时间的存在，而是通过算术计算在社会实际中的应用得到创造的。

至此，我们从"能动的"一方对问题进行了讨论，现在则应看到由社会实践所创造的数(及其它数学对象)也(在一定程度上)反映了自然世界的性质。物质世界的某些对象相互联系以致自然地构成了现实的集合。如一群蜜蜂，一棵树上的树叶，太阳系中的行星等(参见Gillies，〔1982〕，第5章)。数是与这些集合相联系的，从而就是物质实在的一个方面；进而，我们的算术理论也就部分地反映了自然世界。

一般地说，人类(所建立)的理论至多是物质世界的部分反映，而这也就为对于经验数学观的另一种反对意见提供了解答。这种反对意见可以表述如下：纯粹数学中的某些部分，例如，康托的大于$\aleph_2$的超穷基数理论，显然与任何可以经验地检验的感性经验都有很大的差距，经验论的哲学看来不适于数学的这些分支。

我对这一困难的回答是：关于科学与形而上学的区分贯穿于整个数学。在我看来，波普尔的可证伪性作为划界标准并不是充分的。如果一个理论可以经验地证伪，它就是科学的；然而，按照杜恒的观点，一个理论即使不可证伪却也可能是科学的。因此，我主张，一个理论被看成科学的，当且仅当，它可以经验地确证。

让我们以实数及建立于其上的分析理论为例来进行分析。在物理学中，空间与时间的坐标〔(x,y,z)和(t)〕都是实数。这种数

学的时空理论出现在很多为观察和实验以及为实际中的成功应用所确证的物理理论中，从而，实数理论也就由经验得到了确证，我们有理由把它看成是对于物理世界时空特性的部分反映。

作为对照，让我们再来看康托的大于$\aleph_2$的超穷基数理论。它并未在物理学与实际中得到任何应用，从而就不能被看成经验地确证了的，也即是一种形而上学而并非是一种科学。然而，我赞同波普尔关于形而上学是有意义的并对科学有着巨大的潜在应用的观点——这是与维也纳学派关于形而上学是无意义和毫无价值的观点相对立的——今天的形而上学可能成为明天的科学，而且，形而上学对于科学可能是有益的启发性的指导。然而，我并不认为形而上学可以被认为是知识。依据现今的经验论观点，知识是由经验所已确证了的信念所组成的，从而就至少可以被看成对于自然世界的部分反映。

（1987年11月）

参考材料

D. Gillies, [1973], «An Objective Theory of Probability», Methuen.

D. Gillies, [1983], «Frege, Dedekind, and Peano on the Foundations of Arithmetic», Van Gorcum, Assen.

D. Gillies, [1985], «Intuitionism versus Platonism: A 20th Century Controversy Concerning the Nature of Number», «Proceedings of the International Conference of Scientific and Philosophical Controversies in Evora, Portugal, December, 1985».

I. Lakatos, [1963-64], «Proofs and Refutations», Cambridge Univer. Press, 1976.

I. Lakatos, [1968], «Changes in the Problem of Inductive Logic», reprinted in «Philosophical Papers» Vol. Ⅱ, Cambridge Univer. Press, 1978.

I. Lakatos, [1976], «A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?»,reprinted in «Philosophical Papers» Vol. Ⅱ, abv.

K. Popper, [1957], «The Propensity Interpretation of Probability», «British Journal for the Philosophy of Science», 10.

K. Popper, [1972], «Objective Knowledge», Oxford Univer. Press.

二、拉卡托斯的数学哲学和科学哲学

J. 沃勒尔

1. 拉卡托斯的数学哲学与波普尔的科学哲学的关系。

拉卡托斯无疑受到波普尔的极大影响。事实上，他曾一度认为自己是把波普尔的证伪主义推广到了数学的领域。然而，在我看来，这是一个错误。科学中的理论知识确实是可以令人感兴趣地证伪的，但是，与拉卡托斯在一段时期内的信念相反，我认为，他的《证明与反驳》并未能证明数学知识在任何令人感兴趣的意义上是可以证伪的。这一著作以一种饶人兴味的详尽方式所表明的只是数学证明如何不断地获得改进，直至成为完全严格的，也即演绎有效的。拉卡托斯所倡导的“证明分析”的过程正是使证明严格化的主要工具。一旦证明成为完全演绎有效的，就不可能再发现任何新的“局部反例”。这正是关于古典逻辑经典系统的有效性定理所表明的。拉卡托斯有时似乎企图否定这种“欧几里得式的理想”——这是弗雷格的用语——是可以实现的。证明的严格化把所有的数学内容归结到了它所属于的地方：公理。（尽管拉卡托斯正确地指出了这一过程并未能解决“解释的问题”，即一个形式的演绎系统是否完全“俘获”了一个非形式的数学分支。）公理本身是可证伪的吗？不。可能有这样的物理假设，它假设了某个真实

的物理系统具有某种特定的数学结构，这种假设无疑是可证伪的；但是，数学公理本身是不可证伪的。例如，某些人谈到欧氏几何已经为广义相对论的出现所证伪了。但这显然是一种混淆的说法。关于空间具有欧氏结构的物理理论现在可以被认为是假的，而牛顿曾认为它是真的；但是，这并不意味着作为纯粹数学的欧氏几何已经被驳斥了。

在J．扎哈尔和我为《证明与反驳》所写的编者注译中，已对这些观点进行了阐述。

2．拉卡托斯的数学哲学与他的科学哲学的关系。

拉卡托斯主要是一个数学哲学家，而只是在60年代中期转向了科学哲学。尽管上面已经提及，我认为拉卡托斯有时过分夸大了数学与科学的类似性，在他的数学哲学与科学哲学之间确实又有着重要的联系。特别是，拉卡托斯的科学哲学思想中超出波普尔的地方显然主要地就依赖于他对于数学的研究。

波普尔，与莱欣巴赫等逻辑实证主义者一样，主张如下的著名论断，即在“发现的内容”与“检验的内容”（这是莱欣巴赫的术语）之间有着重要的区别。在所有这些学者看来，科学哲学所唯一涉及的只是检验的内容——一旦一个理论得到了发现，一旦它被“摆到了桌面之上”，就轮到哲学家应用他们关于确证的尺度去对诸如这一理论是否为经验证据所强烈地确证、或它是否为所有可能的理论中最强地得到确证的这样一些问题作出解答。另一方面，科学哲学并没有为如何创造很好地确证了的理论提供任何指导。科学发现的全部过程都不属于哲学家的研究范围，而属于心理学家的研究范围。就像波普尔所说：“在最初阶段，设想或创立一个理论，我认为，既不要求逻辑的分析，也不接受逻辑的分析。”(«Logic of Scientific Discovevy»，第 31页.)

与此相反，关于数学历史的研究使拉卡托斯确信在数学中存在有一个真正的、在为逻辑实证主义及波普尔所否定的传统意义

上的方法论，即存在有这样一种实现数学进步的方法，对此可以在事先明确地予以表述，并且是可以实际地予以教学的。当然，这种方法并不能被等同于一个完全的算法；但是，被拉卡托斯称之为"证明分析"的方法确实又可被用以实现数学的进步。这就像拉卡托斯在《证明与反驳》的前言中所指出的："可是，活的数学还不至于如此凄惨，不倒向机器的理性主义，就得倒向瞎朦的非理性主义。"（第4页）。

拉卡托斯正是把这种关于在纯粹后天的理论评价领域与纯粹心理的创造性领域之间存在一个理性的启发性领域的思想引入到了他的科学哲学之中，这并构成了他的思想超出波普尔的主要方面。拉卡托斯突出地强调了其中特殊地包含有正面启发法的研究纲领，这种启发法对于纲领内特殊理论的构造有着确定的指导意义，尽管这种指导作用并不是以算法的形式体现出来的。例如，作为一个特殊的例子，达尔文主义最好就不要被理解成一个特定的学说，而主要是一组用以指导如何构成解决各个特殊问题的特殊理论的一般思想。尽管其它一些哲学家，如N. 汉森(N. Hanson)也曾对实证主义关于发现与检验的区分提出过类似的批评，但我认为，却正是拉卡托斯为以下的思想提出了最清楚的理由：存在一个可以理性地予以分析的"科学发现的逻辑"，而这是与波普尔所否定的——尽管他的著作采用了这一标题——传统意义十分接近的。

（1987年12月）

三、非经验科学的方法论

C. 豪森

1. 引言

哥德尔关于其构造性公理相对于集合论通常的ZF公理的相容性的证明激起了关于理论性命题可接受性的方法论讨论，在这一学科中这种事情并不是经常发生的，多数人甚至把20世纪的大部分工作就看成19世纪在严格性方面的革命的继续。本文具有双重的目的：第一，指明所谓的数学研究的基础方面为方法论的讨论提供了可利用的材料；第二，探讨一下拉卡托斯所提出的关于经验科学发展的解释是否同样适用于数学的这些部分。

在拉卡托斯充分地发展起集中于《科学研究纲领方法论》的思想前，在一篇未曾发表的论文中曾尝试性地提出了这样的想法：纯粹数学的理论可能与经验科学的理论从属于同样的方法论评价准则。拉卡托斯在此所指的是推崇具有更大信息量并得到确证的理论的准则，这是他从波普尔学派的理论中吸取的。然而，这些都与理论的经验内容，即理论的经验所证实结论的集合有着本质的联系；从而，在此显然就有这一概念如何能在数学研究的领域内得到定义的问题。这一问题是由拉卡托斯所提出的，但在很大程度上却未能获得解决。波普尔学派的准则后来作为与纲领之间的准则相对立的纲领内部的准则被引入到了科学研究纲领方法论之中；显然，把科学研究纲领方法论推广应用于数学研究的主要困难也就在此。在第4节中我将对此进行讨论，并给出解决的方法。在第5节中则将指出，尽管上述问题不难解决，即科学研究纲领方法论可以推广应用于数学研究，但是，这种推广所提供的只是关于实际和合理的评价标准的一个很不完全的描述；而这也就涉及到了经验科学与数学的方法论的区别。我认为，这种区别是由于数学的创造性所造成的，对此我将在第5节中详细地予以说明。①

4. 数学中定义“经验基础”的可能性。

① 原文共5节，因篇幅的限制，我们删去了其中的第2节和第3节。

对于数学与经验科学中理论的评价从属于同样的方法论准则的论点，显然有这样一个为大家所熟悉并具有很大影响的反对意见，这就是：数学与经验科学在一个性质上是不同的，即自然科学、生物科学与社会科学都具有“经验基础”，而数学却没有，从而就排除了将科学的评价准则应用于数学的可能性。这种反对意见指出，世界是存在的，并借助于实验技术部分地得到了研究，而这就为科学理论的可接受性加上了独立的限制。由此坚持方法的同一性论题看来就蕴涵了柏拉图主义及我们具有关于抽象事物世界部分特性的非感性的知觉，后者使我们获得了与实验结果相类似的东西。

无论柏拉图主义具有怎样的优越性，在我看来，由赋予数学经验性推出必须接受柏拉图主义是不正确的。我们关于自然数性质的直觉，它表现于皮亚诺的公理系统，是如此地根深蒂固，以致放弃它们是否会比否定基本经验命题的真理性较为容易是大可怀疑的。事实上，在我看来，这两者在认识论上是近乎相同的。我们完全可以承认这样一点而又否认存在有自然数等的独立领域。在此所需的仅仅是起始点和延续（后继）的概念。通过有限次地重复延续的运算构成的“元素”就称为自然数，而又只须假设这些元素的集合是完备的，我们就可利用二值逻辑的便利性。如果在0和延续的概念上再加上聚集由无穷多次地重复延续运算所获得的元素的概念，我们就得到了（有穷的和超穷的）序数以及序数和基数的算术。从而，自然数及其（通常的）超穷推广就可简单地被看成{0}在延续与极限这两种运算下的闭包。换句话说，计数的数只须被看成这样一种实体化了的符号，它们被用于对这些运算的应用进行编号。这种观点由于通常的模型论语言而被弄混了。

直觉——例如，关于集合的直觉——的不完善性以及缺乏“硬性的事实”，并不像通常所假设的那样在数学与经验科学之间造成裂痕，这是由于数学中直觉的清晰性与经验科学中的“实验结果”

是相似的：两者都从属于修正，而并非是“硬性的”或相对地“硬性的”。物理理论的经验内容通常只是它的整个内容的一个部分。进而，诸如物理事实的“可靠性”又依赖于我们在多大程度上把一些十分一般的辅助理论看成是——即使是暂时地——已经给定的。即如所已指出的，关于电流计偏移的观察与关于诸如数论中归纳公理的确认在认识论上并无什么区别。即使承认基本的经验命题是不可修正的，由于产生一个“基本经验命题”必须接受如此之多的知识，包括一般的理论以及实验者的神经生理学特性等，因此，这一命题在很大程度上也就是基本不确定的了。

为了对一个普遍的经验理论进行检验必须接受（即使是暂时地）某些辅助性理论的真理性，这一事实表明，经验科学的“经验基础”即使在语法上也并非完全不同于我故意地称为数学的“经验”基础的东西。事实上，哪一种“基础”——这是由全称与特称命题的混和物所组成的——都不可能纯语法地予以描述。纽拉蒂曾把科学设想成建筑于海面上的一艘小船，其中，在任何时候可以被用以支撑结构的其余部分的东西都不是由它的内在结构所唯一决定的。这一描述看来对经验科学和数学都是适用的。

综上所述，正如哥德尔与已去世的拉卡托斯所指出的，数学对象在外表上的不可感知性或不可观察性并没有排斥应用这样一组准则去对它的理论进行评价，包括指出它们的可确证性（可证伪性）。

5．数学中的研究纲领

依据拉卡托斯，理论的发展方向在很大程度上是由与理论嵌入于其中的研究纲领有关的准则所决定的。科学研究纲领方法论即是刻画出这种理智的准则的一个努力。

经验科学历史的案例分析看来确实证实了研究纲领方法论中所列举的评价准则；然而，对数学史至今尚未进行同样详尽的研究。

在这一论文中我并不能承担这一宏伟的任务；然而，我希望上面的讨论已经表明数学在外表上的非经验性其本身并非将科学研究纲领方法论应用于数学中的研究纲领的障碍，如果这种纲领存在的话。

这种纲领存在吗？我认为对此应当立即作出肯定的答覆。数学中所谓的基础工作显示出纲领的结构，而这事实上即是其最明显的特征。集合论也是一个明显的例子：以康托的工作为开端的全部发展都保持了这样一个不变的原则的内核，这是由诸如ZF的公理体现出来的，以及一个启发性的限制，即通过寻找集合的直观概念的新的性质而使它们成为更为充分的理论（尽管已经证明，完全而相容的理论是不可能的）。

至此，热心于在数学研究领域中对科学研究纲领方法论进行检验的方法论学者将试图回答以下的问题：科学研究纲领方法论中所列举的准则是否为这一学科的实际工作者在对最有希望的研究路线进行评价时所接受的理性准则的一个完全和精确的描述？在这一论文中我也不可能对这一问题作出完整的解答；然而，我可以并将指出那些在我看来是数学史特征性质的东西，这是与著名的基础研究规划相联系的。在那里，一个与科学研究纲领方法论中所列举的不同的准则看来是为人们所普遍接受的。

这一准则即是关于理论的富有成果性或内容的丰富性的一个标准，而且，结论的丰富性在此并不像科学研究纲领方法论或波普尔学派所说的那样受到如下的不变条件的限制，即结论的一部分可以独立地予以检验。在我看来，数学纲领的一个无可否认的长处是，它们引进了一类原则上在纲领中可解的新问题，而并不要求这些问题有超出纲领的独立的解答。停滞或理论的蜕化是一个纲领最终能以产生构成了能在纲领的语言中得到表述的问题的解答的理论性推论的启发性力量的强度的函数。

与所说的停滞十分相似的一个例子看来已出现在现代的集合

论之中。这主要是指通常的公理加上选择公理未能对广义的连续统假设作出判断 而且又缺乏明显可行的扩展方向。一阶集合理论，正像任何足以开展递归算术的一阶理论，已被得知如果相容就是不完备的，但是，像广义连续统假设那样的关于阿列夫的简单关系在所已存在的公理的基础上，甚至在补充了那些“仅仅揭示了集合概念的内容”的强无穷公理的假设以后仍然是不可判定的，这对于一个旨在发展超穷数理论的纲领来说是某种缺陷。……由康托所引进的并由寻找集合概念的可接受性质这一限制所组成的用以构造超穷算术的启发性工具显然处于低潮之中。从而，为那些对包含于标准系统中的公理进行补充的公理进行辩护，并希望能由此而解决广义连续统假设，看来就不是很有前途的。

由上面的讨论我想我们可以引出这样的结论：一个令人满意的数学方法论将不同于令人满意的经验科学方法论，尽管其原因并不像经常所说的那样是由于数学并不是经验的——我想我已经表明了存在有“经验基础”，尽管这是暂时的并是相对于特定的时间和特定的理论而言的——而是由于这两门学科或学科组中对纯理论的进步赋予了不同的重要性。就经验科学而言，一个纲领相对于产生关于世界相应的结构特性的发现是否为一个富有前景的研究方向，其决定性因素是它作为其所包含的启发性可能性的函数而体现出来的产生导致新的可证实事实的理论的能力，对此科学研究纲领方法论予以了特殊的强调。另一方面，在数学中，经验的限制则是与在特定时刻所接受的理论集及直觉上的可信性相联系的。一个成功地解决了那些导致了这一纲领的构思的问题的纲领，常常是通过引进新的语言及能使现存的理论得到解释的理论——这种解释是以这样的方式实现的，它使得旧的理论中的定理经翻译后能为这一纲领所俘获——实现这一目标的，但这又使得这一纲领能够容纳一类全新的问题的表述，进而，它的启发性力量产生这些问题的解答的能力就将成为对这一纲领的价值进行评

价的最主要因素。例如，集合论就包括了古典数论，并能容纳将它推广到无穷集合的数量。

我并不试图表明未曾预料的、独立可检验事实的产生从来不是数学研究纲领的特征，也不是指它的出现应被看成令人高兴的但却只是纲领的不那么重要的特征。例如，递归论就由于图林、邱奇、波斯特、麦柯夫及哥德尔——赫勃朗特等人关于能行可计算性描述的等价性获得了重要的意义。它们中的每一个都体现了能行可计算性概念的一个方面，而其余的则并不是为了反映这一方面而设计的。即如今天所普遍地接受的，所有这些描述都是与例如图林的可计算性相等价的事实就在一定程度上表明了递归论可以被看成对能行可计算性的一个完全的说明，尽管对此并没有或根本不可能作出最终的证明。科学研究纲领方法论，作为一种暂时的结论，看来提供了关于数学方法论的部分真理，但决不是全部的真理。

(原载于 «The Structure and Development of Science», ed. G. Radnitzky & G. Andersson, D. Reidel Pub. Company, 1979年)

附录 II 贝尔论数学哲学与数学基础

【注】 贝尔(J.Bell)是加拿大籍数理逻辑学家，1968年起任教于英国伦敦经济政治学院，现为加拿大西安大略大学哲学系教授。他在数理逻辑方面的主要著作有《数理逻辑教程》、《布尔值模型及集合论的独立性证明》等。贝尔对数学哲学，特别是数学基础问题也有很大的兴趣，并曾发表过多篇论文。笔者曾向贝尔提出了数学哲学的一些基本问题，第一节即是他的答覆；另外，第二节则是他在1987年发表的一篇文章，其中对数学基础研究，特别是逻辑主义等学派的工作进行了介绍和分析，并论及了基础研究方面的一些新进展——在贝尔看来，这就为对逻辑主义等学派的综合提供了现实的可能性。

一、数 学 哲 学

1. 什么是数学哲学？

按照我的观点，数学哲学的主要任务是阐明数学真理的概念、数学概念的性质以及数学与经验的关系。数学哲学具有双重的性质：一方面，它以一种更为纯粹的形式吸取了一般哲学中的一些主要问题（真理及认识的性质等）；另一方面，它所论及的是数学特有的一些特殊概念（数、几何概念、逻辑证明等）。正是这种两重性（一般性、特殊性）决定了数学哲学的特殊性质。

2. 什么是基础研究中技术性研究与哲学性分析的关系？

数学基础方面的工作通常是以哲学性纲领为指导的——而且常常就是为了加强这一纲领而设计出来的。例如，罗素与怀特海的《数学原理》就是证明数学真理归根结蒂地说即是逻辑的或重言的真理的努力的顶点。希尔伯特关于形式系统的研究来自关于世界的有限主义观点（及对于公理化方法的信念）。布劳维尔的直觉主义则源于这样的思想：数学概念是以某种方式与我们意识的结构相联系的。

3. 您对数学哲学发展的现状是怎样看的？

数学哲学从整体上说是以一种自治的方式由彼此独立的个别学者加以发展的。在罗素、希尔伯特、布劳维尔、外尔等人的"黄金时代"以后，这是一个多少为人们所忽视的学科；然而，近年来，（再一次地）由于具有哲学头脑的数学家们（例如麦克兰）的努力，它正在经历某种复兴。

4. 数学哲学与实际的数学研究有什么关系？

（至少就过去的50年而言）在数学哲学与数学研究之间仅有少得令人惊奇的联系。这（至少）有两个方面的原因。第一，在20世纪中，数学的概念与定理有了巨大的增长，而数学哲学则可以说还没有来得及"跟上"这种发展。第二，数学哲学所主要关注的是关于数与集合性质的"本体论"问题，这种作法的官方理由是数学在某种意义上可以"化归"为这些概念；然而，对数学进行组织的新方法的出现（例如，范畴理论）表明，现在已是对数学哲学进行

全面审查的时候了。这样才能对这些新发展作出说明，并使数学哲学与数学本身绝对的丰富性相适应(正像麦克兰的《数学：形式与函数》所表明的那样)。

5．哪些是数学哲学领域中最重要的著作？

一些较为重要的著作：罗素的《数学的原理》，弗雷格的《算术的基础》，外尔的《数学与自然科学的哲学》以及麦克兰的《数学：形式与函数》。同样重要的还有哥德尔、希尔伯特及斯科伦等人的论文。

6．英国数学哲学研究的情况如何？

英国只有较少的数学哲学研究（但是，它在这方面的情况却要好于另外一些国家，例如法国)。罗素与怀特海当然是十分重要的，但他们在剑桥并无真正的后继者（除兰姆赛外，但后者在年轻时即去世了)。维特根斯坦对哲学家(特别在牛津）有很大的影响，但是，作为一个数学哲学家，(至少按照我的观点，)则是较为肤浅的。拉卡托斯在1974年的突然去世使一个很有前途的发展不幸夭折，他在数学哲学方面的工作也未能真正得到继续（这一评论并不适用于他的科学哲学，后者产生了很大的影响)。现代英国的数学哲学中心是牛津，那里有M．杜墨特和D．伊萨克森。

7．数学的性质是什么？

(我认为)数学是抽象形式的科学，对此的分析是符号地（在我看来，这是必然的)予以表述的。数学的结论是内在地确定的，因为，它所采用的是事先给定的精确的论证规则。数学只是在下列意义上相对于外部世界是真的；即数学的形式体现于外部世界中。既然如此，“外部的”数学真理就应当被看成产生于形式的相互关系或一致性。

8．您对数学基础三大派的看法如何？

数学哲学“传统”学派中的每一个——逻辑主义、直觉主义、形式主义——都体现了关于数学性质的部分真理：逻辑主义，数

学真理是与逻辑真理密切相关的；直觉主义，数学活动是通过心智构造的实施进行的；形式主义，这些构造的结果是符号地表述的。但是，所有这些学派又都未能真正地反映数学的现象。

9．悖论的实质何在？

集合论悖论的出现是由于试图把一种其本性是非静态的形式予以实体化：集合的域是不断"扩张"的。我们不能把一个本质上不可完成的东西，或如外尔所说"无限开放"的东西（用技术性语言加以表述的话，就是适用于对角线方法的对象），凝聚成一个完成了的整体。

语言学的悖论源于使用否定以"对角线地"超出任何给定的谓词表，其解决方案看来是类型论的方法。

〔1987年10月于伦敦〕

二、逻辑、悖论与数学基础

"数学化"与音乐一样可能也是人类的一种创造性活动，它的产物不仅在形式上而且在实质上是受历史的决定限制的，从而，就不可能予以完全的、客观的理性化。

——H．外尔

数学，传统的形和量的科学，与逻辑，传统的推理的科学，都是人类智力活动最早的成就；然而，只是到了上一世纪前后，这两者的联系才得到了明确的认识及系统的发展，从而导致了两者的极大繁荣。我将表明这是如何发生的及为什么会发生，并指明逻辑分析对于数学基础的影响。

中世纪的学者把知识成分分为两个范畴。第一个范畴是所谓

的“四学”，包括算术这一数学的艺术，几何学，天文学和音乐；第二个范畴则是所谓的“三艺”，包括语法这一言词的艺术，修词学和逻辑学。从而，在那些学者看来，逻辑学在本质上就是一门语言的学科，而与数学并无或几乎没有关系。无论如何，按照当时的权威性意见，逻辑学已经由亚里士多德完善化了，以致对这一学科的任何进一步的贡献都只是在亚里士多德的大厦上添加一些新的装饰。尽管莱布尼兹在17世纪曾表达了把逻辑转变成普遍的科学语言的愿望，然而，在19世纪中期以前，在这一方面却没有取得什么进展，而只是到了那时，才由英国数学家布尔、德摩根及美国哲学家皮尔斯在使逻辑学超出亚里士多德的水平上迈出了最初的步子。尽管他们作出了创造性的贡献，但是，推动逻辑学演变的主要动力却是由后来出现的数学基础中的困难所提供的。

19世纪末，德国数学家康托在他的数学研究中拒绝了传统的关于在数学中不能允许实无穷概念的观点，并建立了关于无穷整体的数学理论——所谓的集合理论。正如其1895年关于集合概念的著名定义所表明的，康托认为，在有穷与无穷集合之间并无本质的区别：

所谓集合，我们是指把确定的、彼此可区分的直觉或思维的对象汇集成一个整体。当然，问题在于如何精确地去确定哪些汇集构成了合法的“整体”。按照传统的观点，仅有有穷的汇集被承认为所说的整体。因为，人们认为，无穷汇集违反了整体必然大于部分这一由来已久的信条。

无穷汇集违反整体必然大于部分这一原则的奇特方式由于德国数学家希尔伯特所编造的一个故事给人留下了深刻的印象。在这一故事中，希尔伯特成了一家大旅馆的经理，这个旅馆是如此之大，以致事实上有无穷多个房间，即有房间1，房间2，……直至无穷。在旅游旺季，希尔伯特的旅馆住满了客人：每一个房

间都住进了旅客。这时，又来了一个人要求住宿。希尔伯特说："我已经没有空余的房间了。"新来的人感到十分失望。忽然，希尔伯特想到了一个主意，他打电话通知每一个房间中的旅客让他们搬到下一个房间中去，即如房间 1 中的客人搬到房间 2，房间 2 中的客人搬到房间 3，等等。这样，原来的客人仍然都是有着落的(与先前一样，一人一个房间)，而房间 1 却空了出来以供那位"得救了的"新来者居住。由此可见，所有房间的集合在某种意义上并不比从中移去第一个房间所得到的集合大。

然而，故事并没有到此结束。正当希尔伯特准备打出"客满"的招牌时，又来了一大群要求住宿的旅游者。很快的计数表明这个团体有无穷多个人，这真使希尔伯特失去了信心。然而，他突然又产生了另一个主意，他让每一个房间中的客人搬到编号数是原先双倍的房间中去，即如房间 1 中的客人搬到房间 2，房间 2 中的客人搬到房间 4，等等。这样，原来的客人仍然是有着落的，而所有编号数为奇数的房间却都空了出来，从而每个新来的人就都有了住处。显然，这一过程是可以无限地重复的，以至无穷个包括无穷多个旅游者的团体都可以得到住宿，

希尔伯特的故事生动地表明了无穷集合令人瞩目的悖理性质，然而，应当注意的是，它们并非是矛盾的。原先建立的集合论的确包含有矛盾，但是，这并不是由于承认无穷整体所造成的，而是允许由给定类型的所有对象所组成的整体的结果。这可以由罗素在1901年发现的著名的罗素悖论清楚地看出。

罗素悖论是这样的：这是一个信条，即任一集合或者是、或者不是自身的一个元素。例如，所有男人的集合就不是自身的元素；而所有可能的集合的集合则是自身的一个元素。现考虑恰由所有不是自身元素的集合所组成的集合，对此可记为"R"。试问：R 是否为自身的元素？假设它是，它就必须满足R 的定义条件，即必须不是自身的元素；反之，假设它不是自身的元素，从而它就不满

足R的定义条件，即它必须是自身的元素。由此，我们就得到了令人不安的、事实上是矛盾的结论：R是自身的元素，当且仅当，它不是自身的元素。我们还可注意到这一推理与R究竟是有穷或无穷的是无关的。

值得指出的是，外尔给出了罗素悖论的纯语言的对应物，而后者则由于触及到了语言的结构而更加显得令人不安。一个（英语的）形容词如果对自身为真就称为“自逻辑的”，不然就称为“异逻辑的”。例如，“多音节的”(polysyllabic)与“英语的（English）这两个形容词就是自逻辑的；“回文的”(palindromic)和“法文的”(French)则不是。现考虑“异逻辑的”这一形容词是否为自逻辑的？稍事考虑就可发现：“异逻辑的”是自逻辑的，当且仅当，它不是自逻辑的。

另一在最初得到表述时曾引起很大争论的集合论原则是所谓的选择公理。就其最简单的形式而言，这一公理所断言的是，如果给定了任一非空集合的集合S，那么，就存在这样一个集合M，它恰由S的各个元素集中一个元素所组成。我们可以把M设想为是由S的每个元素集中选择一个元素所组成的。当S中仅有有穷多个集合，或S是无穷的，但我们具有从S的各个元素集中选择一个元素的确定方法时，在此并无任何困难；问题只在于S中有无穷多个元素集而我们并不具有从各个元素集中选取一个元素的规则的情况：我们能证明作出无穷多次任意选择的程序（其结果又构成了一个集合）是正当的吗？罗素的下述故事清楚地表明了这里的困难：一个百万富翁有无穷多双鞋子和袜子。出于某种怪癖，这个百万富翁命令他的仆人从每双鞋子中选出一只鞋子。当仆人问他如何去进行选择时，百万富翁回答说，从每双鞋子中选取左边的一只。第二天，百万富翁又让他的仆人从每双袜子中选出一只，然而，当被问之如何去进行选择时，他却感到无从回答了，因为，与鞋子不同，在此并无内在的方法能对一双袜子的两只袜子进行区

分，或者说，对袜子的选择必定是任意的。

选择公理的一个奇特结论是所谓的分球怪论。这是由波兰数学家巴拿赫与塔尔斯基在1924年提出的。就其最惊人的形式而言，这一怪论是指一个球体可以被分割成有限多块并重新组合成两个同样大小的球体(当然，这里所说的“分割”是一种比喻的用法，但是，这并没有减少结论的离奇性)。应当注意，与希尔伯特的旅馆一样，而与罗素悖论不同，这也是反直观而并非矛盾的。

数学史学家们把围绕集合论基础的困难统称为数学基础的“第三次危机”。解决这一危机的努力采取了不同的形式，但他们又都要求对数学的概念和推理作出精确的逻辑分析，而这就导致了作为强有力的新学科的数理逻辑的产生。

围绕数学基础及“危机”的解决形成了三个主要的方向：逻辑主义、直觉主义和形式主义。

与弗雷格、罗素和怀特海(及其他人)相联系的逻辑主义旨在把数学(即集合论)化归为纯粹逻辑，从而，前者的不相容性就可通过借助于无可指摘的逻辑概念进行表述而得到“消解”。在罗素与怀特海那里，康托的集合论被类型论所取代，这是指对集合与其元素作出逻辑的区分：前者被说成比后者具有更高的“类”。悖论通过严格地遵循所谓的“恶性循环原则”得到了排除——按照这一原则，任一集合都不能包括借助于其本身得到定义的元素。(例如，所有集合的集合就违背了恶性循环原则。因为，它把自身也作为一个元素包括在内，从而就不是一个合法的整体。)逻辑主义由于罗素与怀特海在1910年出版的划时代的、但又是令人生畏地十分深奥的著作《数学原理》达到了顶峰。由下述引自发表于1911年《博览》(Spectator)的一篇书评中的一段文字就可看出“深奥”这一形容词用在这里是十分恰当的：

“很容易想象那些出于好奇心而翻阅了这一著作后面章节的普通人的沮丧心情，他将看到除标题外整页纸上都没有任何英语

词汇，取而代之的是令人头晕目眩的各种大小的不连贯的希腊和罗马字母，其间并散布着括号、逗号和引号，在符号上面则有箭头和惊叹号，此外还有一些他甚至难以叫出名字的别出心裁的符号。”

罗素与怀特海的理论的极度复杂性，以及对于他们是否真正地把数学化归成了纯粹逻辑——尽管他们作出了极大努力——的怀疑，使得数学家们对逻辑主义的规划丧失了热情。

荷兰数学家布劳维尔所创立的直觉主义建立在这样一种信念之上：只有当其可以适当地建立在直觉之上时一个数学概念才是可允许的。在布劳维尔看来，数学思想的最终渊源并不是外部的世界，而是我们的直觉意识。(特别是，布劳维尔接受了康德关于自然数产生于对时间序列的直觉领悟的观点。)从而，对直觉主义来说，一个数学对象被认为是存在的，仅当它能以某种确定的方式(在思想中)得到构造。构造成了存在性的证明。进而，无穷整体永远不能被看成完成了的整体，毋宁说，它处于不断的“增长”之中。如果接受了这些原则，对逻辑学与数学都将有很大的影响。例如，前者蕴涵了古典逻辑的排中律不再是普遍有效的。这就是说，我们不再能够断言，对任何给定的命题A，或者A或者A的否定非A成立。按照直觉主义的观点，为了正确地对这一析取式作出断言，我们必须或者具有A的证明或者具有非A的证明；但是，对很多数学断言——例如，每个偶数都是两个质数的和——我们并不具有这样的证明。就第二个原则而言，则使对于康托理论的直接拒绝并按照完全不同的路线去重新构造数学成为不可避免。

直觉主义纲领的极端性质，及其明显地导致了牺牲大部分古典数学的事实，使其在大部分数学家看来就是不那么具有吸引力的。

形式主义，作为希尔伯特的思维产物，旨在通过把数学化归为形式符号的操作而并非逻辑为其提供一个新的基础。希尔伯特认

为，数学中完全可靠的成分只是那些仅仅包含有对具体对象——特殊地，数学对象就被看成纸上的符号——的可察领域进行机械推理的部分。仅仅涉及到数学的这些部分的命题被看成真实的命题；所有其它的数学命题则被认为是理想的命题，即如射影几何中的理想点与"无穷远"直线。（例如，"2 + 2 = 4"就是一个真实的命题，"存在有无穷集合"则是理想的命题。）从而，希尔伯特的真实命题就相当于逻辑实证主义的"可证实命题"，而理想命题严格说来则是无意义的。希尔伯特的形式主义规划的核心目标是用严格具体和无可指摘的方法证明理想命题——特殊地，康托的集合理论（经过了适当修正以排除所提及的悖论）——的古典用法永远不会在真实命题中导致谬误。简单地说，即是希望证明古典数学是相容的。一旦实现了这一目标，数学家们就可自由地漫步于"康托的天堂"，而无须再害怕落入"矛盾的地狱"。

希尔伯特希望通过把古典数学建成一个不具有意义的符号的纯形式系统，并证明这一系统中的任一证明都不会导致诸如0 = 1的荒谬结论来建立古典数学的相容性，后者则又可以通过用真实的具体证明去取代关于真实命题的每一（理想的）证明而实现。由于显然不存在关于（假的）真实命题0 = 1的具体证明，因此，由此即可引出古典数学是相容的结论。

然而，在1931年，奥地利逻辑学家哥德尔却通过证明总有可以用理想方法而不能用具体方法证明的真实命题——这是他的著名的不完备性定理——粉碎了希尔伯特规划。他通过对于古代的撒谎者悖论的一个天才的修改实现了这样一点。为了得出最明显形式的撒谎者悖论，可考虑语句"这一语句是假的"。把这一语句称为A 。稍事考虑就可看出，A 为真，当且仅当，A 为假。简言之，A 所断言的正是自身为假。现在哥德尔证明了，如果在A中用短语"不可具体地证明"去取代"假"这一词语，那么，所得到的命题B 就是真的（即可用理想的方法证明），但却不可具体地证明。因

为，B 所断言的正是自身是不可具体地证明的。

哥德尔进而又证明了算术的相容性不可能用具体的方法得到证明。从而，即使像算术那样具体和清楚的数学分支也必定在一定意义上仅是一种信念。一位评论者曾以引人注目的尖刻口吻对这一不平常的结果作了如下的总结：让我们把任何建立在信念即不可证明的假设之上的思维领域称为神学的一个分支，那么，数学就是神学的这样一个分支，它在其中包括了关于必须如此去进行分类的严格证明。

尽管逻辑主义、直觉主义和形式主义都不能被看成对于数学基础的圆满解释，但又都体现了关于数学性质的重要的部分真理：逻辑主义，数学真理是与逻辑真理密切相关的；直觉主义，数学活动是通过心智构造的实施进行的；形式主义，这些构造的结果是符号地表述的。

在实践中，大部分数学家认为集合论为他们的工作提供了一个合适的基础。这之所以可能主要是因为在本世纪最初的几十年中集合论以这样的方式得到了公理化，即通过对集合组成规则的适当限制避免了明显的矛盾。数学家们发现集合论是可接受的，不仅是因为这使数学成为可能，而且是因为这是与他们中的许多人所具有的一种未说出口的信念相一致的，即数学对象在某种意义上是真实地存在的，而数学定理则表明了关于这些对象的真理。这是实在论的一种形式，有时也被较为含糊地称为柏拉图主义。

最后，再简单地提及数学基础方面的一个惊人的新发展。近年来，对于所有曾已提及的学说的一种综合看来正借助于一门新的数学分支，topos理论，得以形成。在古典的集合论中，集合被认为是固定和不变的，它们位于一个被称为集合领域的永恒的绝对世界中（“康托的天堂”）。topos 理论的观点则不再把集合看成固定的，而认为它们是以某种方式，例如，在时、空中或随知识的状态，“变化着的”。作为这种“可变”集合的一个例子，可考虑所有

已知为两个质数和的偶数的集合：这一集合是随着时间（与知识）而增长的。所有以某种共同的方式“变化”的集合的整体称为一个topos。（顺便指出，“拓扑学”〔topology〕这一数学名词是由希腊词“topos”演变出来的，后者是指“地点”，现在则是由“拓扑学”出发通过逆推造词得出了“topos”这一词汇。）由于存在多种可设想的变化类型，因此，也就有很多topos。例如，“康托的天堂”就可十分恰当地看成这样一种topos，在其中组成的集合的变化缩小到了0：静态的、永恒的特例。

任一topos都可看成一个在其中可以实行一整类数学构造的可能的数学“世界”，与每一这样的“世界”相联系的有一个形式语言——在语法上是与罗素与怀特海所给出的语言相似的——这被用作对这一世界进行描述的“地图”，即包含了——以一种“密码”的形式——对此的一个完整的描述。即如一个地图册中的所有图线具有一种共同的几何，所有与数学“世界”相联系的形式语言也具有一种共同的逻辑。值得注意的是，这种逻辑被证明一般是直觉主义的，即是与布劳维尔所提倡的用于以直觉为基础的概念的逻辑相同的。（这也许无足为奇，因为，我们只需回想起，按照布劳维尔的观点，〔无穷〕整体必须被看成随着时间不断“增长”的，从而就处于变化的状态中。）选择公理在这种事物的模式中占有重要的地位，因为，可以证明，任何满足选择公理的数学世界其内在的逻辑都必定是古典的，即（作为直觉主义逻辑法则的补充）排中律在其中是有效的。逻辑与集合论概念的这种相互作用正是topos理论的特征性质之一。

topos理论为数学基础的新的研究——把逻辑主义、直觉主义和形式主义的显著特征统一起来——所提供的前景是令人鼓舞的，这一规划现在正处于积极的发展之中。

综上所述，逻辑学看来确实由于与数学的结合获得了新的生命。尽管文首所引用的外尔的断言几乎肯定是正确的，但是，逻

辑在企图理解数学的本质特性方面的应用已经产生了辉煌的结果，在将来也无疑会继续带来鼓舞和灵感。

附录 III 从数学到哲学

15年前，华裔美国逻辑学家王浩教授曾以《从数学到哲学》(《From Mathematics to Philosophy》)为题写下了一部数学哲学的专著。数学哲学无疑属于哲学研究的范围，但与一般哲学相比又有着重要的区别。与王浩的著作不同，我们在此将主要讨论数学与一般哲学的联系，并希望能说明数学对于哲学研究所具有的重要的方法论和认识论的意义。

鉴于论题的特殊性质，下面将采取“案例分析”的方法。这主要是：①无限在本质上是数和量的一种表现；②元数学与元哲学；③从数学发现的逻辑到科学研究纲领方法论；④哲学的“数学化”。不难看出，这些论题本身也具有重要的意义；但是，从整体上说，所有这些讨论又都是为了说明这样一点：哲学家们可以而且应当从数学中吸取丰富的思想营养。

一、无限在本质上是数和量的一种表现

无限的问题在哲学研究中占有特别重要的地位，因为，人类的一切认识归根结蒂地说都是对无限的认识。然而，就无限的研究而言，关键之一却在于必须清楚地认识无限的“数学性质”。

具体地说，只有依靠数学，依靠数学的抽象思维，我们才能构造出纯粹的无限。因为，第一，在实践活动中人们所直接接触

的只能是有限的事物和现象，因此，以经验对象为直接原型通过“直接观念化”所生成的也只能是有限的概念，而为了建立无限的概念，则必须依靠思维的“自由想象”，即必须在一定程度上摆脱“经验”的束缚。例如，由于客观条件的限制，对物体的实际分割必然具有一定的限制，从而，如果不摆脱这种“经验”的束缚，我们就不能断言：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”第二，就具体的对象而言，由于量的变化(分割或积累)最终必将引起质的改变，因此，单纯的由有限到无限的量的变化就是不可能的。从而，为了建立无限的概念，我们又必须完全舍弃质的问题，而单纯从量的角度去进行分析。综上可见，我们就只有依靠数学，依靠数学的“自由想象”，才能为无限建立纯粹的模型，并以此为依据去从事无限的研究。

值得指出的是，亚里士多德早已认识到了无限的“数学性质”。他写道：“无限在本质上是数和量的一种表现。”(《物理学》，商务印书馆，1982年，第79页。)亚里士多德并借助于无限的数学模型在历史上第一次明确地提出了潜无限与实无限的区分。按照亚里士多德的说法，潜无限就是“潜能上的无限”，即是把无限看成一种永远处于生成状态中的过程，是“此外永有”；实无限则是“现实的无限”，即是把无限看成相应过程的终结，是一种独立存在的客体，是“此外全无”。亚里士多德指出，只有潜能上的无限，而无现实的无限。亚里士多德的这一断言即就建立在关于无限“数学本质”的分析上。例如，亚里士多德指出，分割的过程永远不会结束，即分割的方向上可以小过任一已知量，并永远有更小的量，因此，就只有潜无限意义上的无限小量；类似地，由于加的过程可以一直继续下去，因此，也就只有潜无限意义上的无限大数。

自亚里士多德的时代至今已有两千多年了，人们对于无限的研究自然不应再停留在亚里士多德的水平上；然而，遗憾的是，现

代的哲学工作者并没有注意从数学的发展中吸取必要的思想武器。特别重要的是，现代数学中已经建立了多层次的无限模型，这就是所谓的超穷数理论。例如，超穷序数的构造是这样的：

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \cdots\cdots\underset{（延伸）（穷竭）}{}\ \omega \qquad （这是第一个超穷序数）$$

$$\omega+1\ ,\ \omega+2\ ,\ \omega+3\ ,\ \cdots\cdots\underset{（延伸）（穷竭）}{}\ \omega+\omega \qquad （即\ \omega\cdot 2）；$$

$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \cdots\cdots\underset{（延伸）（穷竭）}{}\ \omega\cdot 2+\omega \qquad （即\ \omega\cdot 3）；$$

显然，这就为无限的研究提供了一种新的思想武器，从而，在从事诸如时间与空间的哲学思考时，我们就可以而且应当摆脱那种传统的直线型模型的束缚，而利用所说的多层次的无限模型去进行新的思考。例如，如果把时间想象成一种具有多次延伸和穷竭过程的对象，而不是比拟为一条既没有起点也没有终点的直线，我们就可进而考虑"第一推动"与"世界末日"的问题；类似地，我们也可研究"宇宙的边缘"及其它的有关问题。(当然，对于所说的"末日"、"边缘"等我们必须作正确的理解：这并不意味着绝对的完成，而只是表明了相对的穷竭，即在完成的同时又标志着新的〔包含了质变的〕层次的开始。)

综上所述，我们就应善于利用数学的模型，特别是现代的数学理论去从事无限的研究。

二、元数学和元哲学

在数学的各个分支中，数学基础由于其特殊的性质与哲学有着最为密切的联系。正如罗素所指出的，数学基础即是下述方向上的研究，在其中"我们不问从我们开始所肯定的东西能定义或推

演出什么，却追问我们的出发点能从什么更普遍的概念与原理定义或推演出来”，从而，通过分析“所肯定的基本概念和命题”，我们“就进入了愈来愈高的抽象和逻辑的单纯”(《数学哲学导论》，商务印书馆，1982年，第7页。)。显然，这种研究与一般的哲学研究是十分相似的。

正因为数学基础与一般哲学研究有着最为密切的联系，前者就为一般的哲学研究提供了有益的启示和重要的思想武器。对此可以首先以逻辑主义与逻辑实证(经验)主义的历史联系为例进行说明。

如所知，维也纳学派曾公开声称罗素及怀特海的《数学原理》及维特根斯坦的《逻辑哲学论》是逻辑实证主义的两个主要思想来源。就逻辑主义对于逻辑实证主义历史形成的重要性而言，我们并可作出如下的具体分析：

笼统地说，《数学原理》即是关于数学基本概念及原理的逻辑分析。由于这一著作清楚地表明了现代逻辑(逻辑斯蒂)的力量，特别是，“它使哲学终于能够看到：哪些种类的问题是可以解决的，哪些种类的问题由于超出人的能力而必须放弃”，因此，在逻辑实证主义看来，哲学的根本任务就在于从事语言的逻辑分析。这就如同维也纳学派在其宣言中所指出的：“哲学工作的任务在于澄清问题和论断，而不在于提出特殊的‘哲学的’论断。这种澄清的方法就是逻辑分析的方法。关于这种方法，罗素指出：‘通过对数学的批判考察已逐步进入哲学……。我相信，它代表了正如伽里略带给物理学的同样的进步’”。(《科学的世界概念：维也纳学派》，载《自然科学哲学问题》，1989年第1期，第19页。)

作为逻辑分析方法与实证(经验)主义立场的具体结合，逻辑实证主义提出了两类陈述的区分：“一类陈述是经验科学的陈述，其意义可以通过逻辑分析，更确切地说，通过还原为关于经验所予的最简单陈述来确定。另一类陈述，即上面提到的那些陈述，

如果人们按照形而上学所指的意义来理解它们的话，则表明是无意义的。"(同上)考虑到逻辑主义的基础研究正是一种化归主义的努力，罗素等关于悖论的解决方案——分支类型论——则就建立在有意义与无意义的陈述的严格区分上，我们也就可以更清楚地看出逻辑主义对逻辑实证主义的重大影响。

除逻辑主义与逻辑实证主义的历史联系外，我们还可从更为一般的角度去分析数学基础研究对于一般哲学研究的意义。例如，特别重要的是，正是通过基础研究数学家们逐步发展起了一些新的范畴，如数学与元数学，构造性与非构造性，语法与语义，等等。由于"范畴是区分过程中的一些小阶段，即认识世界的过程中的一些小阶段，是帮助我们认识和掌握自然现象之网的网上纽结"，因此，这也就为认识的深化提供了新的思想武器。

为了更清楚地说明问题，我们再来对元数学与元哲学的问题作一分析，如所知，所谓元数学笼统地说就是以数学理论为整体性对象去从事数学的研究，即如研究理论的相容性、完备性等。由于元数学的研究与一般的数学研究(个别命题的演绎证明)相比达到了更高的抽象水平，因此就产生了一些十分重要的结果。例如，著名的哥德尔不完备性定理就是这样的一个例子。一般地说，元数学"已经成为伟大数学家族的一名正式成员"。从而，我们自然也就应当考虑这样的问题：能否将元数学的研究思想应用到哲学之中，即以哲学理论为整体性对象去开展元哲学的研究？

系统地开展元哲学的研究当然不是一件轻而易举的事；但是，作为一种尝试，在此可以列举出元哲学所应研究的一些问题（当然，这并非是一张完全的清单）：

(1)指明哲学研究所应解决的主要问题。(应当注意，这些问题的具体解答属于哲学，而不属于元哲学的研究范围。)

(2)明确指出哲学研究的主要困难。(类似地，这些困难的具体解决也属于哲学，而不属于元哲学的研究范围。)

(3)建立哲学理论的评价标准，即说明一个"好的"哲学理论应满足哪些条件。

(4)对哲学研究的局限性作出分析。

由所列举的问题可以看出，通常的哲学研究事实上已经包含了(或部分地包含了)元哲学研究的内容，而且，具体的哲学研究在很大程度上即是以相应的元哲学思想为指导而进行的，从而，这也就十分清楚地表明了建立元哲学理论的重要性和必要性：这将促使我们更自觉地从元哲学的角度去考虑问题，从而使哲学研究达到新的更高水平。①

三、从数学发现的逻辑到科学研究纲领方法论

正文中的讨论清楚地表明了一般的科学哲学研究(例如，波普尔与库恩的科学哲学思想)对于数学哲学的影响；与此相反，数学哲学对于一般的科学哲学研究也有着一定的启示意义。下面即以拉卡托斯科学哲学理论的发展为例对此进行说明。

如前所述，拉卡托斯早期主要从事数学哲学与数学方法论的研究，自60年代中期起则转向了一般的科学哲学，并发展起了科学研究纲领方法论这一重要的理论。费耶阿本德曾经指出，科学研究纲领方法论可以看成对波普尔的证伪主义及库恩的科学哲学理论的一种综合。(«Criticism and the Growth of Knowledge»,

---

① 应当提及的是，拉卡托斯曾在科学哲学的领域内就如何开展元科学哲学(元科学方法论)的研究进行过有益的探讨。对此可参见《科学研究纲领方法论》，第二章。笔者认为，拉卡托斯之所以能做到这样一点，即是由于他曾长期从事数学与数学哲学的研究，从而对元数学的研究思想及其重要意义有着清楚的了解。

ed. I. Lakatos & A. Musgrave, Cambridge, 1970年, 第 211 页.)
上述说法是有一定道理的；但是，任何重要理论（无论科学的理论或哲学的理论）的发展又必定具有自己的内在机制——只有借助于这种内在机制，外部的成分才能被“消化”和“吸收”，并转化成理论的有机成分。从而，在此也就应当考虑这样的问题：什么是科学研究纲领方法论发展的内在机制？

上述问题的提出十分自然；但是，在很长时期内却未能得到明确的解答。在笔者看来，这主要是因为，尽管国内外对拉卡托斯的数学哲学与科学哲学思想都曾作过详细的研究，但却缺乏对两者的综合考察，而事实上却又正是拉卡托斯先前提倡的数学发现的逻辑为科学研究纲领方法论的发展提供了必要的概念框架。下面就对这一发展作一简要的分析。①

具体地说，拉卡托斯关于数学发现逻辑的研究主要是围绕所谓的“笛卡儿—欧拉猜想”的历史发展进行的（可参见第 6 章）。拉卡托斯指出，这是一个不断对先前所提出的猜想进行反驳并加以改进的过程。对文中提及的各个猜想进行比较，容易看出，尽管猜想的内容不断得到了改进，但其主要结论（在“笛卡儿—欧拉猜想”中就是公式$V+F-E=2$）却保持不变，而只是在原先的猜想中并入了新的前提。由于前提（及相应的引理）的引入就是为了排除“反常”（反例），因此，相对于主要的结论而言，所说的引理事实上就起了一种“保护带”的作用。从而，在数学发现的逻辑与科学研究纲领方法论之间就存在如下的对应关系：

数学：引理——主要结论；

科学研究纲领：保护带——硬核。

---

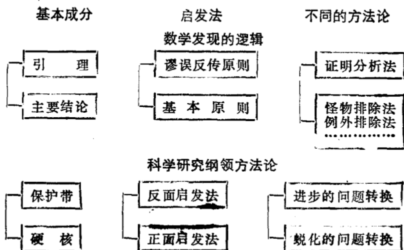
① 这一观点是由笔者在论文《From the Logic of Mathematical Discovery to the Methodology of Scientific Research Programmes》，载“The British Journal or Philosophy of Science”）中首先提出的。

其次，拉卡托斯所谓的数学发现逻辑即是指证明分析法，其主要功能则是通过引入适当的前提消除直接指向主要结论的反例，拉卡托斯并提出了如下的“谬误反传原则”：“谬误应当由素朴的猜想反传到引理，由定理的结论反传到它的前提。”(«Proofs and Refutations»，第47页.) 另外，拉卡托斯还提出了以下的重要思想：“重要之点是应尽快脱离尝试与错误(纠正)的阶段，很快进入思想实验，……”这也就是说，“如果我们获得了一个已被某一反例所驳斥的猜想，我们应把这一反例置于一边，而努力用思想实验去对猜想进行检验：我们可能会发现某个证明，从而超出尝试与错误纠正的阶段而转向证明和反驳的方法。”(同上，第74、75页。)(为方便计，我们将把后一原则简称为“基本原则”。)容易看出，上述的两个原则与科学研究纲领方法论中的反面启发法与正面启发法是直接相对应的。

第三，作为证明分析法的对立面，拉卡托斯还曾提及数学中用到的其它一些方法：尽管这些方法在形式上也可用以排除反例，但无论是所谓的“怪物排除法”或“例外排除法”都不可能导致真正的进步，因为它们或者是一种语言的把戏，或者是一种“约定主义”的策略(即都属于波普尔所说的“特设假设”)。从而，就数学方法论而言，就有“较好的方法”与“较差的方法”的区分，而这显然是与科学研究纲领方法论中所谓的“进步的问题转换”与“蜕化的问题转换”相对应的。

综上所述，在拉卡托斯数学发现的逻辑与科学研究纲领方法论之间就存在如下的对应关系(见下页)。

由此可见，正是数学发现的逻辑为科学研究纲领方法论的发展提供了必要的概念框架；而这也就清楚地表明了数学哲学对于一般科学哲学研究所可能具有的重要意义。



四、哲学的"数学化"

数学化是现代科学发展的一个重要特点，在这样的形势下，人们自然也就会考虑哲学能否数学化的问题。笔者在此并不企图对这一问题作出绝对肯定或绝对否定的解答，而只是希望对哲学"数学化"的含义及其局限性的问题作出初步的分析。

1．哲学"数学化"的含义

与科学的数学化一样，笔者认为，哲学的数学化主要也是就方法论而言的，即是指能否像搞数学那样去从事哲学的研究。应当指出的是，如果采取上述理解的话，哲学的数学化事实上并非一个全新的思想，因为，近代的一些哲学家，特别是笛卡儿与莱布尼兹，早已明确地提出了这样的思想，并曾进行了有益的尝试。

例如，作为近代第一位杰出的哲学家，笛卡儿就特别重视方法论的问题，他并认为只有数学的方法——公理化方法——才是

真正可靠的。从而，在笛卡儿看来，我们就应将这一方法应用到哲学、物理学、天文学等一切领域。具体地说，笛卡儿认为，正确的认识过程应是这样的：直觉是认识的出发点，即我们首先应凭借直觉去获得“自明”的真理，这就是所谓的公理（从而，公理中所涉及的概念就应当是“清楚的”，并可明确地加以区分）；其次，我们则应单纯凭借逻辑演绎由简单到复杂、由原因到结果地去发展我们的认识，直至“获得关于整个宇宙的完美认识，并达到最高度的智慧”。

按照这样的方法论原则，笛卡儿逐步建立了自己的哲学体系。首先，从普遍怀疑的前提出发，笛卡儿引出了自己的第一条哲学公理：我思故我在，即认为必须肯定以“思维”为属性的“精神实体”的独立存在性；另外，笛卡儿认为同样“自明的”还有如下的几条公理：每一现象必有原因；结果不能大于它的原因；心中本来就有完美、空间、时间和运动的观念等。其次，笛卡儿由上述公理出发进行了演绎。例如，由于完美的观念不能从人的不完美的心中推导或创造出来，它只能从一个完美的东西得到，因此，笛卡儿推论道，上帝是存在的；另外，由于思维中具有外部世界的观念，而上帝是不会欺骗我们的，因此，笛卡儿又得出了这样的推论：外部世界也是存在的。这样，笛卡儿就逐步地建立了自己的二元论哲学。由于这一哲学正是应用数学的公理化方法从事研究的结果，因此，在所说的意义上，这也就可以说是一种“数学化了的”哲学。

莱布尼兹所考虑的主要是如何实现思维演算化的问题，为此，他提出了发展通用语言和通用代数的思想。首先，如果能对人类的全部思想进行综合分析，并把它化归成最简单的概念，那么，只要设计出适当的符号来表示这些基本概念及其相互关系，我们就可获得一种同时具有简单性和严密性的符号语言：由于这种语言克服了各种已有的自然语言的弊病（不规则性、含糊性等），因此，

这就是一种理想的、世界性的公共语言，即是所谓的“通用语言”。其次，正由于在通用语言中实现了彻底的符号化，其中的推理过程就将表现为符号（序列）的变形，因此，只要对这种变形作出明确的规定，我们就可按照这些规定机械地去进行推理，即如人们在代数运算中按照明确的法则对代数式进行演算一样。从而，我们最终所获得的就不仅是一种“通用语言”，而且是一种“通用代数”——在这种符号语言中，思维被“演算化”了。

如所知，莱布尼兹的上述思想为逻辑科学由传统逻辑向数理逻辑的发展奠定了基础，并最终导致了逻辑的“数学化”；另外，就哲学的数学化而言，莱布尼兹的工作则事实上体现了进一步的研究方向：符号化和演算化。

综上可见，哲学的数学化就是一个传统的研究课题，并已产生了一些重要的结果，因此，这就是一个有意义的研究方向。

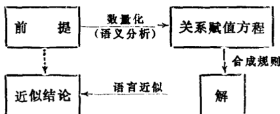
2. 哲学数学化的局限性

哲学的数学化是否有其不可逾越的界限？显然，与辩证逻辑的数学化问题一样，在此我们也突出地遇到了精确与模糊、以及相容与不相容的对立——在一些人看来，这种对立就构成了哲学（及辩证逻辑）数学化的绝对的界限。

笔者认为，由于数学对象是借助明确的定义逻辑地得到构造的，数学理论又是演绎地开展的，因此，精确性确实是数学的一个基本特性。但是，这种精确的特性并不意味着数学的方法只能应用于精确的事物和现象；恰恰相反，模糊数学的现代发展已经证明了数学的方法也可适用于模糊的事物和现象。

就模糊数学及其应用而言，应当强调的是，第一，模糊数学就其本身而言仍然是一种精确的数学理论；第二，模糊数学的应用是一种近似的应用，即其中包含有一定的模糊成分。例如，就模糊推理而言，其中的演算过程（利用模糊关系的合成去求得关系赋值方程的解）就完全是精确的；但是，这种演算又是以对象

(前提或事实)的"数量化"为前提的，即建立在所谓的"语义分析"之上，最终则又必须通过"语言近似"去引出相应的(近似)结论，从而，整个推理过程(见下图)就包含有一定的模糊成分。①



从而，既精确又不十分精确就是模糊推理的主要特点。

由此可见，精确与模糊的对立并不能被看成有关学科(哲学、逻辑等)数学化的绝对界限；另外，数学在模糊领域内的应用又只是相对的，从而，有关学科的绝对的数学化也就是不可能的。

其次，就相容性问题而言，笔者愿意指出，第一，相容性并非数学理论的必要条件。因为，历史上就曾存在有这样的数学理论，如素朴的微积分理论及素朴集合论等，它们中包含有矛盾，但却并非是无意义的；而且，现代的一些数学家和逻辑学家又已更为明确地提出了这样的思想："我们应当接受悖论，学会同悖论一起相处得很好"，他们并积极从事了发展各种不相容系统的尝试。第二，正如各种不协调逻辑的研究所已表明的，否认相容性为数学(及逻辑)理论的必要条件并不意味着可以任凭悖论"泛滥成灾"，而只是指我们应在一定程度上容忍矛盾。特殊地，就不协调逻辑的研究而言，也就是要建立这样的逻辑系统，其中包含有矛盾，但又不会导致理论的崩溃。不协调逻辑的创建者之一雷歇尔和布兰登并曾对这一立场的合理性作了如下的说明：认识活动的目标在于不断扩大知识的范围以获得更多的真理，而并非唯一

① 对此例如可参见郑毓信：《现代逻辑的发展》，辽宁教育出版社，1989年，第十章。

地为了排除错误，因此，我们就应在认识的广度与可靠性程度这两者之间保持适当的平衡。这也就是说，我们不应把相容性看成认识活动的全部和最终的要求，而只能把它看成认识活动诸要素中的一个。第三，尽管新的研究仍然处于尝试阶段，但已表现出了明显的意义。例如，不协调逻辑的研究就是一个典型的例子。①

由此可见，相容与不相容的对立也并非有关学科数学化的绝对界限。

综上所述，由于数学主要是在形式逻辑的范畴内活动的，因此，哲学在绝对意义上的数学化就是不可能的；但是，在此又并不存在任何绝对的界限，即所说的局限性是可以相对地予以突破的。

---

① 可参见郑毓信：《现代逻辑的发展》，第十一章。

附录 IV　数学启发法的主要内容

一、"怎 样 解 题" 表

第一，你必须弄清问题

弄清问题

未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？满足条件是否可能？要确定未知数，条件是否充分？或者它是否不充分？或者是多余的？或者是矛盾的？

画张图？引入适当的符号。

把条件的各个部分分开。你能否把它们写下来？

拟定计划

你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？

你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？

看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。

这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。

你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该

第二，找出已知数与未知数之间的联系。

如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题。

你最终得出一个求解的计划

引入某些辅助元素？

你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？

回到定义去。

如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其它数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？

你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

实现计划

第三，实现你的计划

实现你的求解计划，检验每一步骤。

你能否清楚地看出这一步骤是正确的？你能否证明这一步骤是正确的？

回　顾

第四，验算所得到的解

你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能不能一下子看出它来？

你能不能把这结果或方法用于其他的问题。

（原载于《怎样解题》）

二、发 现 的 规 则

合理性 绝不要做违反你的感觉的事，但也应当不带任何偏见地去查看那些支持你的计划或反对你的计划的种种说得清楚的理由。

经济，但不预加限制 尽可能离题近些。要做好情况要求我们走多远就走多远的准备。

坚持，但有变化 要紧紧抓住已考查过的点子不放，直到找到了某些有用的启示为止。但也要努力去考查某些还没有被开发过的土地，并从中抓住某些有用的启示。

择优规则

困难少的应先于困难多的。

较熟悉的应先于不怎么熟悉的。

与问题有较多共同点的条款应先于与问题有较少共同点的条款。

整体应先于部分，主要部分应先于其它部分，较近的部分应先于较远的部分。

在以前解过的问题中，与现在的问题有同一类型未知量的问题，应先于其它的解过的问题。

与现在要证明的定理有同样结论的过去已证明过的定理应先于其它的已证明过的定理。

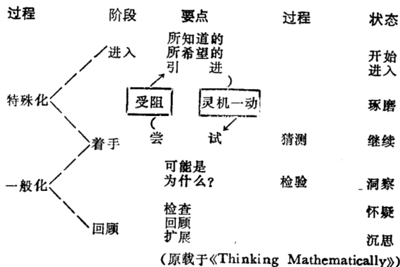
与所提问题等价的问题应先于那些较强的或较弱的问题，而后者又先于其余的问题。或双侧变形的应先于单侧变形，单侧变形又应先于联系更松散的变形。

对所有这些择优规则，我们心里都要加上一句话：如果其他

都一样。

（原载于《数学的发现》）

三、梅森的解题模式



（原载于《Thinking Mathematically》）